Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Arnese

Sui potenziali relativi all'equazione del calore

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.5, p. 604–608.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_604_0>

Analisi matematica. — *Sui potenziali relativi all'equazione del calore* (*). Nota di GIUSEPPE ARNESE, presentata (**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

1. In un loro fondamentale lavoro [1] A. P. Calderon e A. Zygmund hanno studiato una classe di integrali singolari. Una delle applicazioni dei loro risultati concerne le derivate seconde dei potenziali di dominio

$$w(x) = \int_{R_n} \Gamma(x-y)\, u(y)\, dy \tag{1}$$

ove $u \in L^p(R_n)$ $(p > 1)$, R_n è lo spazio euclideo ad n dimensioni e $\Gamma(x)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$; viene dimostrato dai suddetti Autori che le derivate seconde di $w(x)$ esistono quasi ovunque e che per esse si ha

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(R_n)} \leq c \, \| u \|_{L^p(R_n)} . \tag{2}$$

Successivamente L. Hörmander, in un suo recente lavoro [4] dedicato allo studio delle distribuzioni temperate T tali che

$$\| T * u \|_{L^q(R_n)} \leq c \, \| u \|_{L^p(R_n)} \qquad \text{per } u \in D$$

ove D è lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili ed a supporto compatto, ha dimostrato un teorema [1] da cui possono dedursi, in particolare, le disuguaglianze (2).

Ho dimostrato, in un lavoro che verrà pubblicato nel vol. XIII delle « Ricerche di Matematica », che il suddetto teorema di Hörmander può essere generalizzato in un modo molto semplice e che tale generalizzazione permette di stabilire delle disuguaglianze analoghe alle (2) per i potenziali relativi alla equazione del calore. Precisamente, posto

$$w(x, t) = \int_0^T d\tau \int_{R_n} U(x, t; y, \tau)\, u(y, \tau)\, dy \tag{3}$$

ove $u \in L^p(R_n \times [0, T])$ $(p > 1)$ e $U(x, t; y, \tau)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, si prova, con l'ausilio, oltre che della generalizzazione del teorema di Hörmander, di alcune altre semplici consi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1964.

(1) Cfr. [4], teor. 2.1.

derazioni, che le derivate $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ esistono quasi ovunque e che per esse vale la disuguaglianza

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(X)} + \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^p(X)} \leq c \, \| u \|_{L^p(X)} \tag{4}$$

ove s'è posto $X = R_n \times [O, T]$; si trovano, altresì, per tali derivate, formule di rappresentazione mediante integrali principali.

Risultati parziali concernenti l'esistenza e le proprietà di sommabilità di tali derivate erano già stati ottenuti da B. Pini [6] per $n = 1$, $p = 2$, da E. Gagliardo [2] per n qualunque, $p = 2$ e da L. N. Slobodeckiĭ [7] per $u(y, \tau)$ dipendente solo da y.

A stesura già abbastanza inoltrata del mio lavoro innanzi citato sono poi venuto a conoscenza di una Nota preventiva di B. F. Jones jr. [3] in cui si annunciano risultati analoghi a quelli da me stabiliti. Peraltro l'impostazione del lavoro di Jones, da quello che può desumersi dalla sua Nota che è priva di dimostrazioni, differisce dalla mia. Infatti essa sembra conformarsi a quella di Calderon e Zygmund, mentre io mi avvalgo della generalizzazione del teorema di Hörmander di cui s'è detto innanzi; inoltre essa si basa su un modo di troncare i nuclei singolari, e quindi di definire gli integrali principali che intervengono nella questione, differente da quello da me adottato. Infine voglio segnalare che V. A. Solonnikov in un suo lavoro [8], completamente privo di dimostrazioni, annuncia certe maggiorazioni a priori in L^p per le soluzioni di un'equazione parabolica del 2° ordine che sarebbero conseguenza, fra l'altro, di analoghe valutazioni per i potenziali relativi all'equazione del calore. Pertanto ho ritenuto non privo di interesse pubblicare la mia dimostrazione di cui appresso riporto i punti essenziali rimandando, per maggiori dettagli, al mio citato lavoro in corso di stampa.

2. Con procedimenti elementari si dimostra, innanzi tutto, la proposizione seguente:

I. – *Sia* $u \in L^p(X)$ *ove* $X = R_n \times [O, T]$; *allora per il potenziale* (3) *si ha*:

$$\| w \|_{L^p(X)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^p(X)} \leq c \, \| u \|_{L^p(X)}, \tag{5}$$

le derivate $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ *esistendo quasi ovunque.*

Un risultato di questo tipo si può stabilire anche per potenziali relativi ad equazioni paraboliche di ordine superiore al secondo e con coefficienti opportunamente regolari.

Introduciamo, ora, alcune notazioni. Sia S lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili $u(x)$ tali che sup. $|x^\alpha D^l u| < +\infty$ per $x \in R_{n+1}$, per ogni $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})$, $l = (l_1, \cdots, l_{n+1})$ (α_i, l_i numeri interi ≥ 0) e con la topologia definita dalle seminorme sup. $|x^\alpha D^l u|$; con notazioni usuali abbiamo posto $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ e $D^l u = \dfrac{\partial^{l_1+\cdots+l_{n+1}}}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_{n+1}^{l_{n+1}}}$. Denotiamo con L_p^q lo spazio delle distribuzioni $T \in S'$ (duale di S) tali che

$$\| T * u \|_{L^q(R_{n+1})} \leq c \, \| u \|_{L^p(R_{n+1})} \qquad u \in S \tag{6}$$

ove c è una costante.

Poniamo $x_{n+1} = t$, $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x, t)$ e per ogni funzione $K(x, t)$ definita in R_{n+1} facciamo la posizione seguente

$$K_\rho^{(a,\lambda)}(x, t) = \rho^{-\frac{n+\lambda}{a}} K\left(\frac{x}{\rho}, \frac{t}{\rho^\lambda}\right)$$

ove $a \geq 1$, $\rho > 0$, λ intero > 0.

Diciamo $\Omega^{(a,\lambda)}$ la classe delle funzioni localmente integrabili $K(x, t)$ per le quali esistano un compatto M, un intorno N dell'origine ed una costante c tali che

$$\left(\iint_{CM} | K_\rho^{(a,\lambda)}(x-y, t-\tau) - K_\rho^{(a,\lambda)}(x, t) |^a \, dx \, dt \right)^{1/a} \leq c \quad \text{per } \rho > 0, (y, \tau) \in N. \tag{7}$$

Il teorema che generalizza il citato teorema di Hörmander è il seguente:

II. – *Sia* $K \in \Omega^{(a,\lambda)} \cap L_{p_0}^{q_0}$ *con* p_0, q_0 *numeri determinati verificanti le relazioni*

$$\begin{cases} 1 < p \leq q < +\infty \\ \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{a} \end{cases} \tag{8}$$

Si ha, allora, $K \in L_p^q$ *per ogni coppia* (p, q) *verificante le* (8).

Per $\lambda = 1$ si ottiene il teorema di Hörmander.

Mostriamo, ora, brevemente, come questo risultato permetta lo studio del problema di cui si è parlato nel n. 1.

Sia $D_\rho(y, \tau)$ il dominio di R_{n+1} delimitato dall'ipersuperfice

$$\begin{cases} x_i = y_i \pm \sqrt{2n}\, \rho \operatorname{sen} \vartheta_i \cdot \cdots \cdot \operatorname{sen} \vartheta_n \sqrt{\log \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \vartheta_i}} & (i = 1, \cdots, n) \\ t = \tau + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1 \cdot \cdots \cdot \operatorname{sen}^2 \vartheta_n & 0 \leq \vartheta_i \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{9}$$

ove la scelta del segno per ogni $x_i - y_i$ è fatta arbitrariamente ed indipendentemente dalla scelta fatta per le rimanenti $x_i - y_i$.

La (9) è una ipersuperfice di livello per $U(x, t; y, \tau)$ che su di essa è uguale a $1/\rho^n$.

Poniamo

$$K_h(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{per } (x, t) \in D_h(0, 0) \\ \dfrac{\partial^2 U(x, t; 0, 0)}{\partial x_i \partial x_i} & \text{per } (x, t) \in CD_h(0, 0) \end{cases} \qquad (h > 0).$$

Si dimostra il seguente teorema:

III. – *Si ha*: $K_h \in \Omega^{(1,2)} \cap L_2^2$; *di più*, K_h *verifica le disuguaglianze* (6) (*per* $p = q = 2$) e (7) (*per* $a = 1$, $\lambda = 2$) *uniformemente rispetto ad* h.

Posto

$$z_h(x, t) = K_h * u \qquad \text{per} \quad u \in S,$$

dai teoremi II e III consegue:

$$\| z_h \|_{L^p(R_{n+1})} \leq c \, \| u \|_{L^p(R_{n+1})} \qquad (p > 1) \tag{10}$$

uniformemente rispetto ad h.

D'altra parte, per $u \in D$, posto

$$w(x, t) = \iint_{R_{n+1}} U(x, t; y, \tau) \, u(y, \tau) \, dy \, d\tau$$

si ha per $(x, t) \in R_{n+1}$:

$$\lim_{h \to 0} z_h(x, t) = -\delta_{ij} (2\pi)^{n/2} u(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \text{ (2)} \tag{11}$$

ove δ_{ij} è il simbolo di Kroneker.

Da (10), (11) consegue

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(R_{n+1})} \leq c \, \| u \|_{L^p(R_{n+1})} \qquad \text{per} \quad u \in D, \, p > 1. \tag{12}$$

Si ha anche

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^p(R_{n+1})} \leq c \, \| u \|_{L^p(R_{n+1})} \qquad \text{per} \quad u \in D, \, p > 1. \tag{13}$$

Da (5), (12), (13) tenendo presente anche un teorema di E. Gagliardo (3), si deduce facilmente il seguente teorema:

IV. – *Se* $X = R_n \times [O, T]$ *e* $u(x, t) \in L^p(X)$ $(p > 1)$ *la funzione* $w(x, t)$ *data da* (3) *è assolutamente continua rispetto alle variabili separatamente, è dotata di* $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ *assolutamente continue rispetto ad ogni* x_j $(j = 1, \cdots, n)$, *risultando*

$$\| w \|_{L^p(X)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^p(X)} + \sum_{i;j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(X)} + \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^p(X)} \leq c \, \| u \|_{L^p(X)} .$$

Infine, nelle stesse ipotesi del teorema precedente, si dimostra che esiste la formula di rappresentazione

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = -\delta_{ij} (2\pi)^{n/2} u(x, t) + \iint_X^{*} \frac{\partial^2 U(x, t; y, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} u(y, \tau) \, dy \, d\tau$$

(2) Cfr. [5], pag. 408; la dimostrazione è fatta per $n = 1$ ma è valida per ogni n.

(3) Cfr. [2], pag. 187.

per $(x, t) \in X$, essendo

$$\iint\limits_X^* \frac{\partial^2 U(x, t; y, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} u(y, \tau) \, dy \, d\tau = \lim_{h \to 0} K_n * u$$

in media di ordine p in X.

Analogamente

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \iint\limits_X^* \frac{\partial U(x, t; y \tau)}{\partial t} u(y, \tau) \, dy \, d\tau.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] CALDERON A. P., ZYGMUND A., *On the existence of certain integrals*, «Acta Math.», *88*, 85–139 (1952).

[2] GAGLIARDO E., *Problema al contorno per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in n variabili*, «Ricerche di Matem.», V, 169–205 (1956).

[3] JONES B. F. jr., *Singular integrals and parabolic equations*, «Bull. Am. Math. Soc.», *69*, 501–503 (1963).

[4] HÖRMANDER L., *Estimates for translation invariant operators in* Lp *spaces*, «Acta Math.», *104*, 93–140 (1960).

[5] MAGENES E., *Il problema della derivata obliqua regolare per le equazioni lineari ellittico paraboliche del secondo ordine in m variabili*, «Rend. di Matem.», XVI, 363–414 (1957).

[6] PINI B., *Un problema di valori al contorno per l'equazione* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Nota II «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, XIV, 746–749 (1953).

[7] SLOBODECKIĬ L. N., *Soluzioni generalizzate di sistemi parabolici ed ellittici di equazioni differenziali*, «Izsvestija Akad. Nauk S.S.S.R.», Serie Mat., XXI, 809–834 (1957).

[8] SOLONNIKOV V. A., *A priori estimates for certain boundary value problems*, «Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.», *138*, 781–784 (1961), tradotto in «Sov. Math.», *2*, 723–727 (1961).