Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

G. C. Barozzi

Sulle matrici ipoellittiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.5, p. 600–603.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_600_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle matrici ipoellittiche.* Nota (*) di GIULIO CESARE BAROZZI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

1. Sia $x = (x_1, \cdots, x_\nu)$ un punto dello spazio reale euclideo a ν dimensioni R^ν. Poniamo

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D = (D_1, \cdots, D_\nu).$$

Sia

$$\mathcal{P}(\xi) = \| p_{ij}(\xi) \|, \qquad i, j = 1, \cdots, n,$$

una matrice quadrata i cui termini $p_{ij}(\xi)$ sono polinomi a coefficienti costanti nelle variabili $\xi_1, \cdots, \xi_\nu$. Sia Ω un aperto limitato di R^ν; com'è noto la matrice $\mathcal{P}$ si dice *ipoellittica* se, posto $u = (u_1, \cdots, u_n)$, sussiste l'implicazione

$$\left.\begin{array}{r} u \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ \mathcal{P}(D)\, u \in C^\infty(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega),$$

essendo $C^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili in Ω, $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni in Ω. Nella presente Nota considereremo il seguente problema:

Scrivere $\mathcal{P}$ come somma di due matrici

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}' + \mathcal{P}''$$

in modo tale che

a) $\mathcal{P}$ sia ipoellittica se e solo se tale è $\mathcal{P}'$;

b) posto $\mathcal{P}'(\xi) = \| p'_{ij}(\xi) \|$, p'_{ij} sia costituito da termini di p_{ij};

c) per ogni i, j la scelta dei termini di p_{ij} che costituiscono p'_{ij} sia limitata a quelli strettamente necessari affinché sia soddisfatta la a).

$\mathcal{P}'$ si dirà la *parte principale di* $\mathcal{P}$.

2. Consideriamo il polinomio $P(\xi) = \det \mathcal{P}(\xi)$; da Hörmander [1], Teor. 1 e 2, si ha che $\mathcal{P}$ è ipoellittica se e solo se tale è $P(\xi)$.

Sia $m_j, j = 1, \cdots, \nu$, il massimo esponente con cui ξ_j figura isolato in $P(\xi)$, e si ponga

$$m = \max_j m_j \quad , \quad q_j = \frac{m}{m_j} \quad , \quad q = (q_1, \cdots, q_\nu).$$

E' $m_j \geq 1$, $\forall j$, altrimenti P (e quindi $\mathcal{P}$) non è ipoellittico ed il problema in esame non si pone (cfr. [3], n° 1).

È dunque q_j razionale ≥ 1 per ogni j, $\min_j q_j = 1$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo n. 2 del Comitato per la matematica del C.N.R. per l'anno 1963–64.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1964.

Se $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu)$ è un vettore intero non negativo, poniamo $\xi^\alpha = \xi_s^{\alpha_1} \ldots \xi_\nu^{\alpha_\nu}$.

DEFINIZIONE. – *Chiamiamo q–grado del monomio* $a^{(\alpha)} \xi^\alpha$ *la quantità (razionale)*

$$\langle \alpha , q \rangle = \Sigma_j \alpha_j q_j = m \Sigma_j \frac{\alpha_j}{m_j},$$

q–grado di un polinomio il massimo tra i q–gradi dei suoi termini.

3. Può darsi che in $P(\xi)$ compaiano termini il cui q–grado è maggiore di m. Mediante una sostituzione lineare

$$\bar{x} = A x , A = \| a_{ij} \| \quad ; \quad i , j = 1 , \cdots , \nu ; \ \det A \neq 0,$$

(che non altera l'ipoellitticità) si può ottenere un polinomio in $\bar{x}$ per cui questa circostanza non si verifica (cfr. [3], n° 2).

Supponiamo dunque che i termini di P abbiano q–grado minore o uguale a m. Il q–grado (ed anche il grado ordinario) di P è allora m. Sia m_{ij} il q–grado di $p_{ij}(\xi)$; poniamo

$$M = \max_k [m_{1 k_1} + \cdots + m_{n k_n}]$$

dove $k = (k_1 , \cdots , k_n)$ è una permutazione dei numeri naturali $1 , \cdots , n$.

DEFINIZIONE. – $\mathcal{P}$ *si dice q–non degenere se* $M = m$ (cfr. [4], § 1, n° 4).

La quantità $M - m \, (\geq 0)$ può assumersi come indice del «grado di degenerazione» di $\mathcal{P}$.

4. Costruiamo una matrice $\| \bar{m}_{ij} \|$, $i , j = 1 , \cdots , n$ tale che

(a) $m_{ij} \leq \bar{m}_{ij}$, $\forall \, i , j$, $\bar{m}_{ij}$ razionali;

(b) $\bar{m}_{1 k_1} + \cdots + \bar{m}_{n k_n} = M$, $\forall k$.

Il problema ora posto ha almeno una soluzione e questa è unica se già la matrice $\| m_{ij} \|$ soddisfa la (*b*) (cfr. [4], § 1, n° 5). Nel seguito considereremo i polinomi $p_{ij}(\xi)$ come aventi grado $\bar{m}_{ij}$.

Supponiamo dapprima $\mathcal{P}$ q–non degenere ($M = m$). Poniamo

$$\mathcal{P}_0(\xi) = \| p_{ij}^{(0)}(\xi) \| ,$$

dove, avendo posto $p_{ij}(\xi) = \sum_\alpha a_{ij}^{(\alpha)} \xi^\alpha$, è

$$p_{ij}^{(0)}(\xi) = \sum_{\langle \alpha , q \rangle = \bar{m}_{ij}} a_{ij}^{(\alpha)} \xi^\alpha \qquad (\equiv 0 \text{ se } m_{ij} < \bar{m}_{ij});$$

analogamente

$$\mathcal{P}_k(\xi) = \| p_{ij}^{(k)}(\xi) \|$$

con

$$p_{ij}^{(k)}(\xi) = \sum_{\bar{m}_{ij} - k < \langle \alpha , q \rangle \leq \bar{m}_{ij}} a_{ij}^{(\alpha)} \xi^\alpha .$$

Si ha che $\det \mathcal{P}_0$ è precisamente la somma dei termini di q–grado m di $P(\xi)$; quanto a $\det \mathcal{P}_k$, esso contiene certamente tutti i termini di P il cui

q–grado è $\leq m$ e $> m - k$. Se poniamo $P(\xi) = \det \mathcal{S}(\xi) = \sum_\alpha a^{(\alpha)} \xi^\alpha$, e analogamente quanto fatto sopra,

$$P_0(\xi) = \sum_{\langle\alpha, q\rangle = m} a^{(\alpha)} \xi^\alpha \quad , \quad P_k(\xi) = \sum_{m-k < \langle\alpha, q\rangle \leq m} a^{(\alpha)} \xi^\alpha,$$

si ha che $\det \mathcal{S}_0 = P_0$, mentre $\det \mathcal{S}_k$ è più forte di P_k nel senso di Hörmander (cfr. [2], p. 70); in simboli $\det \mathcal{S}_k \succ P_k$.

Sussiste il seguente teorema (analogo a quello di B. Pini [3], n° 2).

Se $P_0(\xi) \neq 0$ *per ogni* ξ *reale* $\neq 0$, $\mathcal{S}(\xi)$ *è ipoellittica; se* $P_0(\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}, \lambda, \xi_{j+1}, \cdots, \xi_\nu) = 0$ *ha radici reali, e l'ordine massimo di molteplicità di esse al variare di* j *è* $\bar{n}$, *allora* $\mathcal{S}(\xi)$ *è ipoellittica se e solo se tale è* $\mathcal{S}_{\bar{n}}(\xi)$.

$\mathcal{S}_0$ nel primo caso e $\mathcal{S}_{\bar{n}}$ nel secondo sarà la parte principale di $\mathcal{S}$. Sia infatti $P_0(\xi) \neq 0$ per $\xi \neq 0$; tenendo presente il teorema dianzi citato di B. Pini, si ha che $P_0(\xi)$, e quindi $\mathcal{S}_0(\xi)$, è ipoellittico; d'altra parte P_0 è ugualmente forte di $P = \det \mathcal{S}$, dunque anche $\mathcal{S}$ è ipoellittica (ved. [2], Teor. 4.1.6).

$\mathcal{S}$ è precisamente del tipo chiamato *quasi–ellittico* da Volevic (ved. [4], § 1, n° 4) e *semi–ellittico* da Hörmander (ved. [2] p. 102).

Analogamente se $P(\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}, \lambda, \xi_{j+1}, \cdots, \xi_\nu) = 0$ ha una radice reale di molteplicità $\bar{n}$, si ha che

$$\det \mathcal{S}_{\bar{n}} \succ P_{\bar{n}} \gtrless P;$$

mentre è

$$\det \mathcal{S}_{\bar{n}} \prec P\ ^{(1)};$$

dunque

$$\det \mathcal{S}_{\bar{n}} \lessgtr \det \mathcal{S} = P.$$

Ne segue che $\mathcal{S}$ è ipoellittica se e solo se tale è $\mathcal{S}_{\bar{n}}$.

Le parti principali ora individuate dipendono, ovviamente, dalla scelta della matrice $\| \bar{m}_{ij} \|$. L'uguaglianza $\det \mathcal{S}_0 = P_0$ mostra però che per matrici *quasi–ellittiche* parti principali corrispondenti a matrici $\| \bar{m}_{ij} \|$ diverse hanno ugual determinante.

5. Supponiamo ora che $\mathcal{S}$ sia una matrice q–degenere. Posto $\delta = M - m$, i ragionamenti precedenti si possono ripetere se, nella definizione di $\mathcal{S}_0$ e di P_k, si pone

$$p_{ij}^{(0)}(\xi) = \sum_{\bar{m}_{ij} - \delta \leq \langle\alpha, q\rangle \leq \bar{m}_{ij}} a_{ij}^{(\alpha)} \xi^\alpha,$$

e

$$p_{ij}^{(k)}(\xi) = \sum_{\bar{m}_{ij} - \delta - k < \langle\alpha, q\rangle \leq \bar{m}_{ij}} a_{ij}^{(\alpha)} \xi^\alpha$$

rispettivamente. Infatti $\det \mathcal{S}_0$ contiene certamente tutti i termini di P aventi q–grado m, $\det \mathcal{S}_k$ quelli aventi q–grado $\leq m$ e $> m - k$.

(1) Ciò segue dal fatto che tutti i termini dei $\det \mathcal{S}_{\bar{n}}$ sono contenuti in P. Peraltro, dette $A = \| a_{ij}(\xi) \|$ e $B = \| b_{ij}(\xi) \|$ due matrici polinomiali di ordine n, se per ogni i, j, a_{ij} è costituito da parte (eventualmente tutti) i termini di b_{ij}, è in generale falsa la relazione $\det A \prec \det B$.

6. Sussiste la seguente proprietà:

Se $\mathcal{S}(\xi)$ *è una matrice ipoellittica, le soluzioni del sistema* $\mathcal{S}(D)\, u = 0$ *e quelle del sistema* $\mathcal{S}_n^-(D)\, u = 0$ *appartengono alla stessa classe di Gevrey.*

Da Hörmander [1], Teor. 3, si ha che le soluzioni di $\mathcal{S}(D)\, u = 0$ e quelle dell'equazione $P(D)\, u = 0$ appartengono alla stessa classe di Gevrey. Analoga affermazione per $\mathcal{S}_n^-(D)\, u = 0$ e $\det \mathcal{S}_n^-(D)\, u = 0$.

D'altra parte, essendo $\det \mathcal{S}_n^-$, P_n^- e P ugualmente forti, le soluzioni delle equazioni $\det \mathcal{S}_n^-(D)\, u = 0$, $P_n^-(D)\, u = 0$ e $P(D)\, u = 0$ appartengono alla stessa classe di Gevrey (ved. [3], n° 4).

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. HÖRMANDER, *Differentiability properties of solutions of systems of differential equations*, « Arkiv för Mat. », Band 3, 527–535 (1958).

[2] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Berlin 1963.

[3] B. PINI, *Osservazioni sulla ipoellitticità*, « Boll. U.M.I. », *18*, 420–432 (1963).

[4] L. P. VOLEVIC, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*, « Mat. Sbornik », *59* (101), 3–52 (1962), (in russo).