Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Rota, Gleb Wataghin

Sul calcolo delle differenze di masse di alcune particelle elementari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.5, p. 581–586.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_581_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 maggio 1964

Presiede il Socio anziano M. PICONE

NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sul calcolo delle differenze di masse di alcune particelle elementari.* Nota di MARIO ROTA e GLEB WATAGHIN, presentata [*] dal Socio G. WATAGHIN.

La scoperta di un elevato numero di particelle dette elementari e di stati risonanti modifica profondamente i problemi della self-energia e della rinormalizzazione delle costanti d'accoppiamento. Nella presente Nota ci proponiamo di studiare due particolari problemi di energia propria partendo da una formulazione recente di una teoria non locale [1] che permette di calcolare le differenze di masse attribuibili ad interazioni. Non sarà discusso il problema generale delle masse delle particelle elementari.

Cominciamo col prendere in esame il problema della self-energia di un pione neutro pseudoscalare, partendo dal modello di Fermi e Yang basato sui processi $\pi^0 \leftrightarrows p + \bar{p}$. Dobbiamo generalizzarlo in modo da includere tutti i processi del tipo: $\pi^0 \leftrightarrows$ barione + antibarione, e usare un formalismo relativistico. Rappresenteremo l'operatore del campo del π^0 come segue:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\bar{p}} \left(\frac{b^+(\bar{p})}{\sqrt{2 p_0}} e^{-ipx} + \frac{b^-(\bar{p})}{\sqrt{2 p_0}} e^{+ipx} \right) \tag{1}$$

ove

$$px = p_0 x_0 - \bar{p} \cdot \bar{x} \quad , \quad p_0 = \sqrt{m^2 + (\bar{p})^2} \,,$$

m è la massa non rinormalizzata del π^0 e V è il volume di normalizzazione.

(*) Nella seduta del 9 maggio 1964.

(1) G. WATAGHIN, « Ann. Inst. Henri Poincaré », *1*, n. 1, 47 (1964); « Il Nuovo Cimento », *30*, 483 (1963).

Analogamente per il campo di spinori di Dirac, che rappresentano barioni di specie i, scriveremo:

$$\psi_i(x) = \psi_i^+(x) + \psi_i^-(x)$$

ove

$$\psi_i^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{\pm ikx} \sum_{\nu=1,2} a_{i\nu}^\pm(\vec{k})\, v_i^{\nu\,\pm}(\vec{k})$$

(2)
$$\bar{\psi}_i(x) = \psi_i^*(x)\,\gamma_0 = \bar{\psi}_i^+(x) + \bar{\psi}_i^-(x)$$

ove

$$\bar{\psi}_i^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{\pm ikx} \sum_{\nu=1,2} a_{i\nu}^{*\pm}(\vec{k})\, \bar{v}_i^{\nu\,\pm}(\vec{k})$$

(l'indice i specifica il valore dello spin, dello spin isotopico, della stranezza, carica, massa ecc.).

Per rinormalizzare simultaneamente la costante di accoppiamento e la massa del pione m, useremo un modello di Lee relativistico, e precisamente scriveremo una equazione di Schrödinger stazionaria nel sistema di riferimento CM in cui il pione π^0 è in riposo, risolvendola con il metodo di Fock, Tamm e Dancoff.

Sia $H = H_0 + H_{int}$ l'operatore hamiltoniano:

$$H_0 = \sum_{\vec{p}} p_0\, b^+(\vec{p})\, b^-(\vec{p}) + \sum_k k_0 \sum_{\nu,i} [a_{i\nu}^{*+}(\vec{k})\, a_{i\nu}^-(\vec{k}) + a_{i\nu}^+(\vec{k})\, a_{i\nu}^{*-}(\vec{k})]$$

(3)
$$H_{int} = -\sum_i \frac{g_{0i}}{\sqrt{2p_0 V}} \left\{ \sum_{\vec{k}+\vec{k}'=\vec{p}} f(\vec{p},\vec{k}) \sum_\nu [\bar{v}_i^{\nu-}(\vec{k}')\,\gamma_5\, v_i^{\nu-}(\vec{k})] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot b^+(\vec{p})\, a_{i\nu}^{*-}(\vec{k}')\, a_{i\nu}^-(\vec{k}) + \text{h.c.} \right\}$$

ove $f(\vec{p},\vec{k})$ e $f^*(\vec{p},\vec{k})$ sono operatori di taglio, definiti nei cosidetti «sistemi di riferimento del vertice» [1], che nel caso considerato coincidono tutti col sistema del centro dei momenti CM (a causa della conservazione dell'impulso in ogni vertice, come risulta dalla scelta dell'hamiltoniano (3): H_{int}) Gli operatori f e f^*, essendo per definizione degli invarianti relativistici, sono anche invarianti rispetto alle rotazioni intorno al centro. g_0 è la costante di accoppiamento non rinormalizzata.

Per ragioni di semplicità, in (3) non abbiamo introdotto esplicitamente le limitazioni corrispondenti alla conservazione dello spin isotopico, del numero barionico, della parità e dell'ipercarica.

La massa ε del pione π^0 pseudoscalare può essere calcolata come l'autovalore più basso dell'equazione:

(4)
$$(H_0 + H_{int})\,\Psi = \varepsilon\Psi$$

corrispondente all'autofunzione (pseudo-scalare) che può essere scritta nella forma:

$$(5)\qquad \Psi = \mathrm{N}\left\{ b^{+}(\mathrm{o}) + \sum_{k,\nu,i} \Phi_i(\vec{k})\,[\bar{v}_i^{\nu+}(\vec{k})\,\gamma_5\,v_i^{\nu+}(-\vec{k})]\,a_{i\nu}^{+}(-\vec{k})\,a_{i\nu}^{*+}(\vec{k}) \right\} |\,\mathrm{o}\,\rangle .$$

In questa rappresentazione $|\,\mathrm{o}\,\rangle$ indica lo stato del vuoto e N la costante di normalizzazione che è legata alla costante di accoppiamento rinormalizzata dalla relazione

$$g = g_0\,\mathrm{N}.$$

In (5) sono stati trascurati i termini corrispondenti alla produzione di più di una coppia di antiparticelle.

Incominceremo col risolvere il problema nell'ipotesi che solo la reazione $\pi^0 \rightleftarrows p + \bar{p}$ sia presente.

Sostituendo (5) in (4) si trovano le equazioni

$$(6)\qquad m - \frac{2\,g_0}{\sqrt{2\,m\mathrm{V}}} \sum_k f(\vec{k})\,\Phi(\vec{k}) = \varepsilon$$

$$(7)\qquad \Phi(\vec{k}) = \frac{g_0}{\sqrt{2\,m\mathrm{V}}}\,\frac{f^{*}(\vec{k})}{2\,k_0 - \varepsilon}\,.$$

Nella (6) si è fatto uso della relazione:

$$\sum_\nu [\bar{v}^{\nu-}(-\vec{k})\,\gamma_5\,v^{\nu-}(\vec{k})]\,[\bar{v}^{\nu+}(\vec{k})\,\gamma_5\,v^{\nu+}(-\vec{k})] = \mathrm{T}r\,\frac{\hat{k}_1 - \mathrm{M}}{2\,k_0}\,\gamma_5\,\frac{\hat{k}+\mathrm{M}}{2\,k_0}\,\gamma_5 =$$

$$= \mathrm{T}r\,\frac{(\hat{k}_1 - \mathrm{M})\,(\hat{k} - \mathrm{M})}{4\,k_0^2} = 2\,, \qquad \text{ove} \qquad \begin{aligned} \hat{k}_1 &= k_0\,\gamma_0 + k_1\,\gamma_1 + k_2\,\gamma_2 + k_3\,\gamma_3 \\ \hat{k} &= k_0\,\gamma_0 - k_1\,\gamma_1 - k_2\,\gamma_2 - k_3\,\gamma_3 . \end{aligned}$$

Sostituendo (7) in (6) e passando al limite $\mathrm{V} \rightarrow \infty$, si trova

$$(8)\qquad \varepsilon = m - \frac{g_0^2}{2\,\pi^2\,m} \int \frac{f(k)\,f^{*}(k)\,k^2\,dk}{2\,k_0 - \varepsilon}$$

ove $k = |\vec{k}|$ e:

$$f(k)\,f^{*}(k) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\,k^2\right)^4 \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\,k^2\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4}\,m^2\right)}\,.$$

Qui si è fatto uso della seguente scelta delle costanti $\hbar = c = 1$; massa del protone $\mathrm{M} = 1$, lunghezza universale $l = 1/2$ e di conseguenza gli invarianti che appaiono nei fattori di taglio sono (vedi [1]):

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{I}_t = \mathrm{I}_t\,(k_\mu\,u_\mu) = l\,k_\mu\,u^\mu = \frac{1}{2}\,(k_0)_{\mathrm{CM}} \\ &\mathrm{I}_s = (\mathrm{I}_t^2 - l^2\,k_\mu\,k^\mu)^{1/2} = \frac{1}{2}\,|\vec{k}\,|_{\mathrm{CM}} \\ &\mathrm{G}_t^{\pm} = \left(1 \pm i\,\frac{k_0}{2}\right)_{\mathrm{CM}}^{-1} \qquad \mathrm{G}_s = \left(1 + \frac{\vec{k}^2}{4}\right)_{\mathrm{CM}}^{-1} \\ &f = \mathrm{G}_s^2\,(k_\mu)\,[\mathrm{G}_t^{-}\,(k_\mu)]^2\,\mathrm{G}_t^{+}\,(p_\mu) \\ &f^{*} = \mathrm{G}_s^2\,(k_\mu)\,[\mathrm{G}_t^{+}\,(k_\mu)]^2\,\mathrm{G}_t^{-}\,(p_\mu) \end{aligned} \right.$$

La costante di rinormalizzazione si ricava dalla condizione di unitarietà $\psi\psi^{*} = 1$.

Le formule finali si possono ora scrivere per il caso generale in cui tutti i processi contemplati in (3) sono presenti.

Indicando con

$$\mathrm{I}_{i1} = s_i \int \frac{k^2\, dk}{(2\, k_{oi} - \varepsilon)\left(1 + \frac{1}{4}\, k^2\right)^4 \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\, k^2\right)^2}$$

$$\mathrm{I}_{i2} = s_i \int \frac{k^2\, dk}{(2\, k_{oi} - \varepsilon)^2 \left(1 + \frac{1}{4}\, k^2\right)^4 \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\, k^2\right)^2}$$

ove $\varepsilon \cong 0{,}144$, e s_i è un fattore dipendente dallo spin del barione di massa $\mathrm{M}_i\ [k_{oi}^2 = k^2 + \mathrm{M}_i^2]$ e, per particelle di spin $\frac{1}{2}$, $s_i = 1$, $\mathrm{M}_i = 1$, si trova:

$$\varepsilon = m - \frac{\left(\sum_i \frac{g_i^2}{2\,\pi^2}\, \mathrm{I}_{i1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\, m^2\right)^{-}}{m - \left(\sum_i \frac{g_i^2}{2\,\pi^2}\, \mathrm{I}_{i2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\, m^2\right)^{-}} \tag{10}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= \mathrm{N}^2 \left[1 + \left(\sum_i \frac{g_{oi}^2}{2\,\pi^2 m}\, \mathrm{I}_{i2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\, m^2\right)^{-1}\right] \\ g_i &= \mathrm{N} g_{oi}. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

I valori degli integrali I_{i1} e I_{i2} sono stati calcolati per le coppie di nucleoni–antinucleoni e risultano:

$$\mathrm{I}_1 \cong 0{,}0826$$

$$\mathrm{I}_2 \cong 0{,}0317.$$

Scegliendo per l il valore $\frac{2}{3}$, si trovano rispettivamente i valori: $\mathrm{I}_{i1} = 0{,}036$ e $\mathrm{I}_{i2} = 0{,}013$.

Il numero approssimato degli stati di iperoni e stati risonanti (di spin semi–intero) attualmente conosciuto è dell'ordine di 40. Il numero delle coppie che contribuiscono alla self–energia è minore a causa delle leggi di conservazione dello spin isotopico, della parità ecc. sopramenzionate. Per esempio per π^0, nel caso del tripletto isotopico, si deve considerare l'espressione [(2)]:

$$\frac{p\bar{p} + n\bar{n}}{\sqrt{2}}.$$

Tenendo conto dell'incertezza del valore delle costanti di accoppiamento g_i e facendo i calcoli approssimati, si trova dalla (10), che per ottenere il valore sperimentale di $\varepsilon = 0{,}144$, si deve assegnare alla massa non rinormalizzata m un valore compreso fra 1,5 e 3 masse protoniche.

Come secondo esempio del calcolo di una differenza di masse dovute ad interazioni scegliamo il noto caso della differenza di massa fra un pione $\pi^{\pm}$ carico ed un pione neutro π^0.

(2) Uno degli A. (G. W.) ringrazia il prof. J. P. Vigier per le utili discussioni su quest'argomento.

Le interazioni responsabili sono:

1° interazione elettromagnetica col campo dei fotoni;

2° interazione debole coi leptoni (coppia muone–neutrino ν_μ e coppia elettrone–neutrino ν_e').

Inoltre, se si adotta anche per il pione carico uno schema della self–energia analogo a quello precedentemente esposto (Fermi–Yang), è necessario tener presente che le coppie di barioni responsabili sono diverse dal caso del pione neutro e sono in numero minore. Ci limitiamo, in questa Nota, a titolo di esempio, a considerare il contributo della interazione elettromagnetica nel secondo ordine della teoria delle perturbazioni. Scriviamo l'espressione della self–energia nel sistema di riposo (CM) del pione introducendo nei vertici i fattori di taglio su tutte le linee del consueto diagramma del 2° ordine:

$$\Delta m = -\frac{e^2}{(2\pi)^4\, i\, 2m} \cdot \tag{12}$$

$$\cdot \int \frac{(p-k)^2\, d^4 k}{(k^2+i\varepsilon)\,[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]\,(1+l^2 k_0^2)\,[1+l^2(m-k_0)^2]\,(1+l^2|\vec{k}|^2)^4} =$$

$$= -\frac{e^2}{(2\pi)^4\, i\, 2m} \int_0^\infty \frac{4\pi\, \vec{k}^2\, d|\vec{k}|}{(1+l^2\vec{k}^2)^4}\, \frac{1}{l^4} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(p-k)^2\, dk_0}{(k^2+i\varepsilon)\,[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]\left(k_0+\frac{i}{l}\right)\left(k_0-\frac{i}{l}\right)\left(k_0-m+\frac{i}{l}\right)\left(k_0-m-\frac{i}{l}\right)}$$

dove m e p sono la massa e il tetra–impulso del pione neutro ($\vec{p}=0$, $p_0=m$) e k è il tetra–impulso del fotone emesso e riassorbito.
Notiamo che i «sistemi di riferimento del vertice» necessari per definire il taglio coincidono col sistema CM.

Il calcolo è stato effettuato in due modi: calcolando col metodo dei residui l'integrale nel piano complesso di k_0 e poi eseguendo una integrazione numerica oppure valutando la parte reale e il coefficiente immaginario di Δm applicando la nota formula di Dirac per i propagatori. Avendo fatto uso della relazione:

$$\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)\,[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]} = -\frac{1}{2\, m\, k_0}\left(\frac{1}{k^2+i\varepsilon}-\frac{1}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\right)$$

(in questo secondo caso) il contributo principale alla parte reale di Δm è dato dal 1° termine della precedente:

$$\Delta m \cong -\frac{e^2}{(2\pi)^4\, 2\, mi}(-i\pi)\, 4\pi \int_0^\infty \frac{|\vec{k}|\, d|\vec{k}|}{(1+l^2|\vec{k}|^2)^6} \cong \frac{1}{137}\cdot\frac{3{,}45}{\pi}\cdot 0{,}4$$

ove si è fatto uso delle unità sopracitate $M = \frac{1}{2l} = 1$ e ove le seguenti approssimazioni sono state fatte

$$1 + l^2 m^2 + l^2 |\vec{k}|^2 - 2 l^2 m |\vec{k}| \longrightarrow 1 + l^2 |\vec{k}|^2$$

$$1 + l^2 m^2 + l^2 |\vec{k}|^2 + 2 l^2 m |\vec{k}| \longrightarrow 1 + l^2 |\vec{k}|^2 .$$

Donde segue: $\Delta m \cong 5{,}9\, m_e$ (m_e massa elettronica).

Confrontando col valore sperimentale di $\Delta m = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} \sim 9\, m_e$ si conclude che, con la scelta dei fattori di taglio sopra indicati ove $l = \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}$, il contributo dell'interazione elettromagnetica alla self-massa del pione carico è dello stesso ordine di grandezza della differenza di masse osservata.