
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

VITTORIO CANTONI

Sull'equazione classica del moto di una particella carica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.4, p. 461–466.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_4_461_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sull'equazione classica del moto di una particella carica*^(*). Nota di VITTORIO CANTONI, presentata ^(**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

L'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una particella carica accelerata da una quadriforza influisce sul moto della particella stessa. Come è noto, tengono conto di tale influenza, nell'ambito della relatività ristretta e dell'elettrodinamica classica, le equazioni di moto di Lorentz-Dirac: si tratta di equazioni del terz'ordine, le cui soluzioni dipendono quindi, oltre che dagli abituali dati iniziali (posizione e quadrivelocità), anche dal valore iniziale della quadriaccelerazione. Tale circostanza comporta delle difficoltà d'indole fisica relative alla determinazione univoca della soluzione; per superarle, Dirac suggerisce un criterio che tuttavia egli stesso considera poco soddisfacente dal punto di vista fisico, e che non è applicabile in pratica nel caso più generale.

Cercheremo di sostituire questo criterio con un altro, valido senza restrizioni, che ci sembra fisicamente più accettabile.

1. EQUAZIONI DI MOTO DI LORENTZ-DIRAC E DIFFICOLTÀ AD ESSE INERENTI. — Siano m ed e rispettivamente la massa e la carica di una particella priva di struttura interna, in moto sotto l'azione di un campo elettromagnetico F^{ik} , ($i, k = 1, 2, 3, 4$). Il tensore F^{ik} si suppone assegnato in funzione delle sole coordinate cartesiane x^i , ($i = 1, 2, 3, 4$; $x^4 = ct$), cui si pensa riferito lo spazio-tempo di Minkowski, (segnatura $+++ -$): il moto della particella non ha quindi, per ipotesi, alcuna influenza sul campo descritto dal tensore F^{ik} . In queste condizioni il moto della particella è descritto, in prima approssimazione, dal sistema di equazioni differenziali (del second'ordine nelle x^i):

$$(1) \quad m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$$

(τ tempo proprio; $u^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$), equazioni che non tengono conto della « reazione di radiazione », cioè dell'influenza che il campo elettromagnetico generato dalla particella stessa esercita sul moto.

Se si vuol tener conto di tale reazione si è condotti, con Schott e Dirac (cfr. [2], [3], [7]), al seguente sistema (del terz'ordine nelle x^i):

$$(2) \quad m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} - \frac{2e^2}{3c^5} \frac{du_k}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau} u^i.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 36 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1963-64.

(**) Nella seduta dell'11 aprile 1964.

Il primo membro rappresenta la variazione istantanea dell'impulso-energia della particella. Il primo termine a secondo membro rappresenta la quadri-
forza di Lorentz, normale alla quadrivelocità, dovuta al campo F^{ik} . Gli altri
due termini, che complessivamente costituiscono un vettore anch'esso nor-
male alla quadrivelocità, rappresentano il contributo del campo generato
dalla particella stessa alla variazione istantanea dell'impulso-energia: più
specificamente, il quadrivettore $-\frac{2e^2}{3c^5} \frac{du_k}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau} u^i$ coincide, a meno del segno,
con l'impulso-energia della radiazione emessa, e corrisponde ad una perdita
irreversibile di energia da parte della particella, (non essendo mai positiva la
sua quarta componente); il termine $\frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2}$ rappresenta invece uno scambio
reversibile di impulso-energia fra la particella ed il suo campo, (reversibile
nel senso che tutte le sue componenti possono cambiare segno in fasi diverse
del moto).

Le soluzioni del sistema (2) dipendono non soltanto dalla posizione x_o^i e
dalla quadrivelocità u_o^i della particella in un fissato istante iniziale τ_o , ma anche
dal valore iniziale della sua quadriaccelerazione. Tuttavia, come Dirac fa
notare, una scelta arbitraria della quadriaccelerazione iniziale può condurre
a soluzioni fisicamente inaccettabili. Per rendersene conto basta considerare
il caso in cui, a partire da un certo istante τ_o , F^{ik} è nullo sulla linea oraria
della particella; un semplice calcolo mostra allora che le (2) implicano:

$$(3) \quad a(\tau) = a_o e^{\frac{3mc^3}{2e^2} \tau}$$

($a \equiv \left(\frac{du^k}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} \right)^{1/2}$, norma della quadriaccelerazione; $a_o \equiv a(\tau_o)$, suo valore
iniziale).

È chiaro che le soluzioni corrispondenti ad un valore non nullo di a_o non
sono accettabili da un punto di vista fisico; ad esse corrisponde infatti un'acce-
lerazione rapidamente ed *indefinitamente* crescente in modulo, nonostante la
supposta assenza di un campo acceleratore esterno per $\tau > \tau_o$. Sono fisica-
mente corrette soltanto le soluzioni corrispondenti ad $a_o = 0$, (moti rettilinei
uniformi).

Dirac suggerisce, per superare questa difficoltà, di rinunciare ad imporre
la condizione iniziale sulla quadriaccelerazione, per sostituirla con una « con-
dizione finale », cioè con una scelta del valore del limite di $\frac{du^i}{d\tau}$ per τ tendente
ad infinito. Ad esempio, nel caso particolare ora considerato, si trovano le
soluzioni fisicamente corrette imponendo la condizione $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{du^i}{d\tau} = 0$.

Questo procedimento sembra poco soddisfacente per due ragioni: in primo
luogo non si può supporre che il moto sia determinato da una « condizione
finale » senza violare il principio di causalità; in secondo luogo, esclusi i casi
in cui si sa a priori che il campo F^{ik} tende a zero sulla linea oraria per τ
tendente ad infinito, non è possibile stabilire quale sia la quadriaccelerazione
« finale » da scegliere per la particella.

Vogliamo qui indicare un criterio fisicamente plausibile che consente di scegliere, fra le infinite soluzioni del sistema (2) corrispondenti a valori prefissati della posizione e della quadrivelocità iniziali, quella che presumibilmente corrisponde al moto effettivo.

Tale criterio è basato sulla seguente considerazione di carattere fisicamente intuitivo: a parità di posizione e quadrivelocità iniziali, a parità di massa e di campo $F^{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, si può ritenere che *a particelle di cariche poco diverse corrispondano* (nel senso che verrà meglio precisato), *linee orarie di poco diverse*. In particolare si può ritenere che la linea oraria di una particella carica sia tanto più prossima a quella di una particella neutra quanto più piccola è la carica stessa.

2. UN CRITERIO PER LA DETERMINAZIONE UNIVOCA DEL MOTO. — Accettando la congettura fisica sopra enunciata, il problema si può impostare in termini precisi. Fissiamo una volta per tutte il campo $F^{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, la massa m ed i dati iniziali x_o^i ed u_o^i . Posto $\lambda = \frac{e}{c}$, per ogni valore di λ il sistema (2), completato dalle suddette condizioni iniziali, ammette ancora infinite soluzioni, generalmente dipendenti da λ . Se potremo determinare *univocamente* quattro funzioni $x^i(\tau, \lambda)$, ($i = 1, 2, 3, 4$), le quali:

- a) siano funzioni continue del parametro λ per ogni valore di $\tau (\geq \tau_o)$;
- b) per ogni valore di λ diano una soluzione del corrispondente sistema (2):

$$(4) \quad m \frac{du^i(\tau, \lambda)}{d\tau} = \lambda F^{ik} u_k + \lambda^2 \left(\frac{2}{3c} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} - \frac{2}{3c^3} \frac{du_k}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau} u^i \right) \\ \left(u^i(\tau, \lambda) \equiv \frac{dx^i(\tau, \lambda)}{d\tau} \right);$$

- c) per ogni valore di λ soddisfino le condizioni iniziali:

$$(4') \quad x^i(\tau_o, \lambda) = x_o^i \quad ; \quad u^i(\tau_o, \lambda) = u_o^i,$$

diremo che, per ogni valore di λ , le $x^i(\tau, \lambda)$ rappresentano *la soluzione* fisicamente accettabile del sistema (2). La condizione a) traduce il criterio di scelta da noi adottato.

Il problema ammette al più una soluzione se si richiede, come faremo in un primo tempo, che le $x^i(\tau, \lambda)$, oltre a soddisfare le condizioni a) b) e c), siano, con le loro derivate prime seconde e terze rispetto a τ , e per ogni valore di τ compreso in un intervallo chiuso $(\tau_o, \tau_o + h)$, funzioni analitiche del parametro λ , e che per $\tau_o \leq \tau \leq \tau_o + h$ i loro sviluppi in serie di Taylor riferiti al valore $\lambda = 0$ siano uniformemente convergenti. Infatti, posto

$$u^i(\tau, \lambda) \equiv \frac{dx^i}{d\tau}, \text{ si ha, per } \tau_o \leq \tau \leq \tau_o + h:$$

$$x^i(\tau, \lambda) = x_o^i(\tau) + \lambda x_1^i(\tau) + \lambda^2 x_2^i(\tau) + \dots$$

$$u^i(\tau, \lambda) = u_o^i(\tau) + \lambda u_1^i(\tau) + \lambda^2 u_2^i(\tau) + \dots$$

$$\frac{du^i(\tau, \lambda)}{d\tau} = \frac{du_o^i}{d\tau} + \lambda \frac{du_1^i}{d\tau} + \lambda^2 \frac{du_2^i}{d\tau} + \dots$$

$$\frac{d^2 u^i(\tau, \lambda)}{d\tau^2} = \frac{d^2 u_o^i}{d\tau^2} + \lambda \frac{d^2 u_1^i}{d\tau^2} + \lambda^2 \frac{d^2 u_2^i}{d\tau^2} + \dots;$$

introducendo questi sviluppi in serie nelle condizioni (4) e (4'), e mettendo in evidenza le diverse potenze di λ , si ottiene rispettivamente:

$$(5) \quad m \frac{du_o^i}{d\tau} + \lambda \left(m \frac{du_1^i}{d\tau} - F^{ik} u_o^k \right) +$$

$$+ \lambda^2 \left(m \frac{du_2^i}{d\tau} - \frac{2}{3c} \frac{d^2 u_o^i}{d\tau^2} + \frac{2}{3c^3} \frac{du_o^k}{d\tau} \frac{du_o^k}{d\tau} u_o^i \right) + \dots = 0$$

$$(5') \quad \begin{cases} x_o^i(\tau_o) - x_o^i + \lambda x_1^i(\tau_o) + \lambda^2 x_2^i(\tau_o) + \dots = 0 \\ u_o^i(\tau_o) - u_o^i + \lambda u_1^i(\tau_o) + \lambda^2 u_2^i(\tau_o) + \dots = 0, \end{cases}$$

e queste uguaglianze devono valere qualunque sia λ , il che implica l'annullarsi dei coefficienti di ciascuna potenza di λ .

L'annullarsi in (5) e (5') dei termini indipendenti da λ conduce alle equazioni differenziali del second'ordine nelle $x_o^i(\tau)$:

$$(6) \quad \frac{du_o^i(\tau)}{d\tau} = 0$$

ed alle corrispondenti condizioni iniziali:

$$(6') \quad u_o^i(\tau_o) = u_o^i \quad ; \quad x_o^i(\tau_o) = x_o^i,$$

che nel complesso determinano completamente le $x_o^i(\tau)$, (nonché, naturalmente, le $u_o^i(\tau)$ ecc.).

Analogamente l'annullarsi dei termini lineari in λ conduce alle equazioni differenziali del second'ordine nelle $x_1^i(\tau)$:

$$(7) \quad \frac{du_1^i(\tau)}{d\tau} = F^{ik} u_o^k$$

(con secondi membri ormai noti), ed alle corrispondenti condizioni iniziali

$$(7') \quad u_1^i(\tau_o) = 0 \quad ; \quad x_1^i(\tau_o) = 0$$

che nell'insieme determinano completamente le $x_1^i(\tau)$.

Continuando con questo procedimento si ottengono successivamente equazioni differenziali del second'ordine nelle $x_2^i(\tau)$, $x_3^i(\tau)$, ecc. con condizioni

iniziali ben determinate. Le $x^i(\tau, \lambda)$ sono quindi individuate senza ambiguità, tramite i loro sviluppi in serie, per $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + h$; anzi lo sono anche per $\tau > \tau_0 + h$, potendosi ormai calcolare, per ogni valore di λ , la quadriaccelerazione all'istante τ_0 , che completa i dati iniziali occorrenti per individuare una soluzione del sistema (2).

Applicando questo criterio al caso particolare già considerato ($F^{ik} = 0$ sulla linea oraria per $\tau > \tau_0$), si ottiene subito la soluzione desiderata

$$x^i(\tau, \lambda) = u_0^i(\tau - \tau_0) + x_0^i$$

(moto rettilineo uniforme).

Supponiamo ora che, ferma restando la condizione *a*), le altre condizioni di regolarità che si sono richieste per le $x^i(\tau, \lambda)$ si debbano considerare troppo restrittive.

Possiamo ancora costruire le successioni di funzioni $x_0^i(\tau), x_1^i(\tau), x_2^i(\tau), \dots$, univocamente determinate dalle equazioni differenziali (6), (7), ecc. con le corrispondenti condizioni iniziali (6'), (7'), ecc., ma ora non è detto che le serie

$$x_0^i(\tau) + \lambda x_1^i(\tau) + \lambda^2 x_2^i(\tau) + \dots$$

e quelle da esse ottenute per derivazione termine a termine rispetto a τ risultino convergenti.

Fissato un intero positivo n , prendiamo allora in considerazione le somme parziali di ordine n :

$$S_n^i(\tau, \lambda) = x_0^i(\tau) + \lambda x_1^i(\tau) + \lambda^2 x_2^i(\tau) + \dots + \lambda^n x_n^i(\tau);$$

per il modo in cui sono state costruite, esse soddisfano esattamente le condizioni iniziali *c*) e la condizione *a*); inoltre, introducendo nella (4) le $S_n^i(\tau, \lambda)$ al posto delle $x^i(\tau, \lambda)$, la (4) stessa si riduce all'uguaglianza a zero della somma di un numero finito di termini, tutti di ordine non inferiore a λ^{n+1} . Se λ è sufficientemente piccolo, (come presumibilmente accade nella maggior parte dei casi di interesse fisico), anche la (4), e quindi la condizione *b*), si può considerare soddisfatta dalle $S_n^i(\tau, \lambda)$ con approssimazione tanto migliore quanto più grande è n . Si può quindi ritenere che le $S_n^i(\tau, \lambda)$ forniscano una descrizione approssimata, ma con approssimazione comunque elevata, del moto della particella.

In fase di correzione di bozze sono venute a conoscenza dei lavori di H. J. Bhabha [4] e di F. Rohrlich [5].

Nel primo viene suggerito il criterio di scelta adottato in questa nota, di cui abbiamo mostrato la sufficienza (in aggiunta alle condizioni iniziali x_0^i ed u_0^i) ai fini della determinazione univoca del moto, e la effettiva applicabilità nel caso più generale (cioè in presenza di un campo esterno).

Nel secondo l'equazione di Lorentz-Dirac viene sostituita con un'equazione integro-differenziale equivalente simultaneamente all'equazione (2) ed alla condizione imposta da Dirac sul comportamento dell'accelerazione per τ tendente ad infinito. Rohrlich dimostra che le soluzioni di questa nuova equazione si riducono, al limite per ϵ tendente a zero, a soluzioni dell'equazione del moto di una particella neutra, traendone una conferma della validità dell'equazione proposta. In questo modo però non sembrano eliminate le difficoltà concettuali che abbiamo segnalato riguardo al criterio di scelta di Dirac, e non sembrano potersi trattare i casi in cui la linea oraria della particella incontra discontinuità del campo F^{ik} .

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] H. A. LORENTZ, *The theory of the electron* (Leipzig 1909).
- [2] G. A. SCHOTT, « Phil. Mag. », 29, 49 (1915).
- [3] P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. » (London), A 167, 148 (1938).
- [4] H. J. BHABHA, « Phys. Rev. », 70, 759 (1946).
- [5] F. ROHRLICH, « Ann. Phys. », 13, 93 (1961).
- [6] F. ROHRLICH, « Physics today », 15, 19 (1962).
- [7] LANDAU LIFSHITZ, *The Classical theory of fields*, Pergamon Press (1962), § 76.