
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

DEMETRIO MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN

**Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle
soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti
equazioni integro-differenziali con operatori esterni
di tipo parabolico**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.4, p. 451–456.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_4_451_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali con operatori esterni di tipo parabolico.* Nota di DEMETRIO MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. In una serie delle loro Note lincee gli Autori, pur additando ad una vasta serie di applicazioni nei domini attuali della fisica ed alta tecnica, hanno studiato da vari punti di vista i problemi al contorno concernenti le equazioni integro-differenziali, lineari o no, con operatore esterno iperbolico o pluri-iperbolico [1]–[3].

Nella presente Nota gli Autori, ripromettendosi di ritornare sull'argomento tramite previa traduzione dei problemi studiati in quelli del calcolo delle variazioni, ove i risultati del tutto recenti dovuti all'Illustre Accademico linceo Mauro Picone, concernenti criteri sufficienti in generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti [4], offrono una messe di risultati di ampiezza sin'ora del tutto imprevedibile [5], espongono alcuni risultati spettanti all'esistenza, l'unicità e valutazione delle soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni integro-differenziali lineari o no, con operatori esterni di tipo parabolico, d'importanza vieppiù crescente nei vari problemi di trasporto [6], di filtrazione e diffusione [7]–[8] ed altri ancora. I risultati algoritmici e le dimostrazioni rispettive saranno esposte in un lavoro da inserirsi nel « Bollettino dell'Istituto politecnico di Iași » [9].

2. Si consideri il problema al contorno

$$(1) \quad u(x, 0) = \varphi_1(x),$$

$$(2) \quad u(0, t) = \varphi_2(t) \quad , \quad u(a, t) = \varphi_3(t),$$

$$(3) \quad P[u(x, t)] - \sum_{i=0}^1 A_i(x, t) \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial x^i} = f(x, t) \\ + \int_0^t \sum_{i=0}^1 K_i(x, t, \tau) \frac{\partial^i u(x, \tau)}{\partial x^i} d\tau,$$

ove $\varphi_1(x)$, $A_i(x, t)$, $K_i(x, t, \tau)$ ($i = 1, 2$), $f(x, t)$ sono funzioni date continue, $\varphi_i(t)$ ($i = 2, 3$) sono funzioni note regolari per tutti (x, t) , (x, τ)

(*) Nella seduta dell'11 aprile 1964.

$\in D = [0, a] \times [0, T]$, mentre l'operatore esteriore che compare nell'equazione integro differenziale (3) è di tipo parabolico, cioè

$$P[u(x, t)] \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Tenendo conto del fatto che, in seguito della trasformazione

$$(4) \quad u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{a} \varphi_3(t) + \frac{a-x}{a} \varphi_2(t),$$

il sistema (1)-(3) risulta equivalente al sistema

$$(5) \quad v(x, 0) = \varphi_0(x),$$

$$(6) \quad v(0, t) = 0, \quad v(a, t) = 0,$$

$$(7) \quad P[v(x, t)] - \sum_{i=0}^I A_i(x, t) \frac{\partial^i v(x, t)}{\partial x^i} = F(x, t) \\ + \int_0^t \sum_{i=0}^I K_i(x, t, \tau) \frac{\partial^i v(x, \tau)}{\partial x^i} d\tau,$$

essendovi $F(x, t)$ una funzione continua nota, e avendo in vista l'equazione

$$(8) \quad w(x, t) = \Phi(x, t) + \int_0^t \int_0^a N(x, \xi, t, \alpha) w(\xi, \alpha) d\xi d\alpha,$$

a cui si perviene tramite l'applicazione al sistema (5)-(7) della trasformazione

$$(9) \quad v(x, t) = \int_0^t w(x, \tau) d\tau,$$

e che diventa successivamente

$$(10) \quad v(x, t) = \psi(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha) \left\{ F(\xi, \alpha) - A_0(\xi, \alpha) \int_0^\xi w(x, \alpha) dx \right. \\ \left. - A_1(\xi, \alpha) w(\xi, \alpha) + \int_0^\alpha \left[K_0(\xi, \alpha, \tau) \int_0^\xi w(\xi, \tau) d\xi \right. \right. \\ \left. \left. + K_1(\xi, \alpha, \tau) w(\xi, \tau) \right] d\tau \right\} d\xi d\alpha = \Psi(x, t) \\ + \int_0^t \int_0^a M(x, \xi, t, \alpha) w(\xi, \alpha) d\xi d\alpha,$$

ove $\Psi(x, t)$, $\psi(x, t)$, $M(x, \xi, t, \alpha)$ sono funzioni note due volte continuamente derivabili per rapporto alla variabile x e una volta continuamente derivabili rispetto alla variabile t per tutti (x, t) , $(\xi, \alpha) \in D$ ⁽¹⁾, mentre

$$(11) \quad G(x, \xi, t, \alpha) \equiv \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left[\left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 (\alpha - t) \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a},$$

risulta, poiché il nucleo $N(x, \xi, t, \alpha)$ non possiede autovalori per valori finiti della variabile t [10], il seguente

TEOREMA 1. — *Se le funzioni $A_i(x, t)$, $K_i(x, t, \tau)$ ($i = 0, 1$), $F(x, t)$, $\varphi_0(x)$ sono continue nel dominio (x, t) , $(x, \tau) \in D$, il problema (5)–(7) possiede nella classe di funzioni C_{21} , per tutti $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq T$, una soluzione unica data mediante*

$$(12) \quad v(x, t) = \Psi(x, t) + \int_0^t \int_0^a M(x, \xi, t, \alpha) \omega(\xi, t) d\xi d\alpha,$$

ove

$$(13) \quad w(x, t) = \Phi(x, t) + \int_0^t \int_0^a R(x, \xi, t, \alpha, 1) \Phi(\xi, \alpha) d\xi d\alpha \equiv \omega(x, t)$$

e $R(x, \xi, t, \alpha, 1)$ è il nucleo risolvante del nucleo $N(x, \xi, t, \alpha)$.

3. Il metodo indicato cui sopra permette la riduzione del problema

$$(14) \quad v_1(x, 0) = \varphi_{01}(x) \quad ; \quad v_1(0, t) = 0 \quad ; \quad v_1(a, t) = 0,$$

$$(15) \quad P[v_1(x, t)] - \sum_{i=0}^1 B_i(x, t) \frac{\partial^i v_1(x, t)}{\partial x^i} = F_1(x, t) \\ + \int_0^t \sum_{i=0}^1 R_i(x, t, \tau) \frac{\partial^i v_1(x, \tau)}{\partial x^i} d\tau$$

al sistema di equazioni integrali

$$(16) \quad v_1(x, t) = \Psi_1(x, t) + \int_0^t \int_0^a M_1(x, \xi, t, \alpha) w_1(\xi, \alpha) d\xi d\alpha,$$

$$(17) \quad w_1(x, t) = \Phi_1(x, t) + \int_0^t \int_0^a N_1(x, \xi, t, \alpha) w_1(\xi, \alpha) d\xi d\alpha,$$

ove $\Psi_1(x, t)$, $\Phi_1(x, t)$, $M_1(x, \xi, t, \alpha)$, $N_1(x, \xi, t, \alpha)$ sono funzioni note, mentre $v_1(x, t)$ e $w_1(x, t)$ sono le funzioni incognite.

Definizione. — Diremo che la soluzione del problema (5)–(7) è *stabile* rispetto a piccole perturbazioni delle funzioni note figuranti nelle (5)–(7),

(1) Tali funzioni si diranno di classe C_{21} .

se per ogni $\varepsilon > 0$ può essere indicato un $\delta > 0$ tale, che l'ineguaglianza $|v(x, t) - v_1(x, t)| < \varepsilon$ risulta dalle ineguaglianze

$$(18) \quad \begin{cases} |\Psi(x, t) - \Psi_1(x, t)| < \delta, & |\Phi(x, t) - \Phi_1(x, t)| < \delta, \\ |M(x, \xi, t, \alpha) - M_1(x, \xi, t, \alpha)| < \delta, \\ |N(x, \xi, t, \alpha) - N_1(x, \xi, t, \alpha)| < \delta, \end{cases}$$

valide per tutti $(x, t), (\xi, \alpha) \in D$.

Ha luogo il seguente

TEOREMA 2. - *Condizione sufficiente affinché la soluzione del problema (5)-(7) sia stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note figuranti nelle (5), (7) consta nella validità delle ineguaglianze*

$$(19) \quad \max_D |\Psi(x, t) - \Psi_1(x, t)| < \varepsilon : 3,$$

$$(20) \quad \max_D \int_0^t \int_0^a |M(x, \xi, t, \alpha)| d\xi d\alpha \cdot \rho < \varepsilon : 3,$$

$$(21) \quad \max_D \int_0^t \int_0^a |M(x, \xi, t, \alpha) - M_1(x, \xi, t, \alpha)| d\xi d\alpha < \varepsilon : [3 \max_D |w_1(x, t)|],$$

ove

$$(22) \quad \max_D |w(x, t) - w_1(x, t)| \leq \rho, \quad (x, t) \in D.$$

4. Nel caso in cui si consideri, in corrispondenza all'equazione integro-differenziale parabolica non lineare

$$(23) \quad P[v(x, t)] - A_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = F[x, t, v(x, t)] \\ + \int_0^t \left\{ K_2(x, t, \tau) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + K_3[x, \tau, v(x, \tau)] b(t, \tau) \right\} d\tau,$$

il problema al contorno (5), (6), l'applicazione dei procedimenti di cui sopra conduce all'equazione integrale

$$(24) \quad v(x, t) = \Psi_4(x, t) + \int_0^t \int_0^a K_4[x, \xi, t, \alpha, v(\xi, \alpha)] d\xi d\alpha$$

e quindi, non appena è soddisfatta l'ineguaglianza

$$(25) \quad l = 1 - \max_D \int_0^t \int_0^a \gamma(x, \xi, t, \alpha) d\xi d\alpha > 0,$$

che ne assicura la validità dell'oramai classico principio di Banach si può enunciare il seguente:

TEOREMA 3. — *Se la funzione $K_4[x, \xi, t, \alpha, v(\xi, \alpha)]$ è continua nel dominio $D_1 = \{D, m_1 \leq |v| \leq m_2\}$ rispetto a tutti i suoi argomenti, mentre rispetto all'argomento v soddisfa la condizione di Lipschitz con coefficiente $\gamma(x, \xi, t, \alpha)$, il problema (5), (6), (23) possiede una soluzione unica appartenente alla classe C_{21} non appena sia soddisfatta l'ineguaglianza (25).*

5. — Rinunciando di esporre costì i risultati concernenti problemi di stabilità spettanti al sistema integro-differenziale parabolico non lineare (5), (6), (23), enuncieremo in relazione al problema della valutazione qualitativa delle soluzioni dei problemi di cui sopra il seguente

TEOREMA 4. — *Se le funzioni note che figurano nelle (5), (7) sono definite e continue per tutti $x \in [0, a], t, \tau \in [0, T]$, mentre la funzione regolare e non negativa*

$$(26) \quad \varphi(t) \geq \left| \int_0^a \Phi(x, t) dx \right|, \quad \varphi(t) > 0, \quad \varphi'(t) \geq 0,$$

è monotona non decrescente per tutti $t \in [0, T]$, nel dominio D ha luogo la valutazione

$$(27) \quad |w(x, t)| \leq |\Psi(x, t)| + \int_0^t \sigma(x, t, \alpha) [\varphi^2(\alpha) : \varphi(0)] \exp \pi(\alpha) d\alpha,$$

ove si è posto

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(t) = \int_0^t |w(x, t)| dx, \quad p(x, \alpha) \geq |N(x, \xi, t, \alpha)|, \\ \zeta(x, t) = \int_0^t p(x, \alpha) d\alpha, \quad \sigma(x, t, \alpha) \geq |M(x, \xi, t, \alpha)|, \\ \pi(\alpha) \geq \zeta(\xi, \alpha), \quad (x, t), (\xi, \alpha) \in D. \end{array} \right.$$

6. Nella Nota [12] saranno espone, parallelamente alla deduzione più dettagliata delle valutazioni aprioriche di forma (27), un certo numero di valutazioni aposterioriche, mentre nella [9] si discuterà, in collegamento col sistema di equazioni spettanti alla teoria matematica della diffusione [8]

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda u = h(x, t, u, w), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = g(x, t, u, w), \end{array} \right.$$

ove Λ è un operatore parabolico quasilineare

$$(30) \quad \Lambda u \equiv \sum_{i,j=1}^r a_{ij} \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u}{\partial t},$$

il problema di esistenza, unicità e valutazione relativo all'equazione integro-differenziale non lineare equivalente al sistema (29) e ad alcune condizioni iniziali e di frontiera.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXIV, 2, 123-129 (1963).
- [2] D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXIV, 2, 118-122 (1963).
- [3] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXII, 3, 306-312 (1962).
- [4] M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*, « Atti della Accademia Naz. dei Lincei, Roma », Memorie, CCCLX-1963 (8), VII, Sez. I (Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica), 3, 33-58.
- [5] D. MANGERON, *Application de nouveaux critères suffisants généraux de M. Picone à l'étude variationnelle des problèmes à la frontière relatifs aux équations aux dérivées totales*, « Mathematica, Cluj », 6 (29), 1964 (in corso di stampa).
- [6] R. JANCEL, TH. KAHAN, *Electrodynamique des Plasmas fondée sur la Mécanique statistique*, Dunod, Paris 1963.
- [7] E. J. SCOTT, *On the Non-linear One-Dimensional Diffusion Equation with a Source or Sink*, « Bull. Inst. politehn. Iași », n.s., X (XIV), 1-2, 1964 (in corso di stampa).
- [8] V. N. MASLENNIKOVA, *Ob odnom klasse sistem matematicheskoi teorii diffuzii (Su una classe di sistemi concernenti la teoria matematica della diffusione)*, « Sovietskó-amerikaniskii simpozium v Novosibirsk po uravneniam s častnymi proizvodnymi », Sib. otd. AN SSSR, Novosibirsk, 1963, 7 pp.
- [9] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Alcuni teoremi spettanti ai sistemi di equazioni relativi alla teoria matematica della diffusione*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s.n., X (XIV), 3-4, 1964 (in corso di stampa).
- [10] E. A. BARBASIN, L. P. BISIARINA, *Ob ustoičivosti rešenii integro-differentsial'nyh uravnenii. (Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni integro-differenziali)*, « Izv. vysš. učebn. zavedenii, Matematika », 3, 3-14 (1963).
- [11] J. DOUGLAS, B. F. JONES, *Numerical methods for integro-differential equations of parabolic and hyperbolic types*, « Numer. Math. », 4, 96-102 (1962).
- [12] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sur quelques problèmes à la frontière concernant une classe d'équations intégró-différentielles paraboliques*, « Revue Roumaine de Mathématiques », Acad. R.P.R., 1964, 7 (in corso di stampa).