Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giannantonio Pezzoli

Le doppie schiere generalizzate di vortici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.3, p. 347–351.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_3_347_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Idrodinamica. — *Le doppie schiere generalizzate di vortici.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

Nel 1940 Maue [1] e successivamente Dolaptschieff [2], studiando alcune questioni connesse alla scia vorticosa di Kàrmàn, introdussero nuovi tipi di doppie schiere di vortici: le così dette « configurazioni a due parametri »; tuttociò sempre restando nello schema classico di moto piano irrotazionale di fluido perfetto illimitato.

La fig. 1 mostra chiaramente che cosa si intende con questa locuzione: si tratta di due file parallele di vortici di uguale intensità e di segno contrario aventi lo stesso passo l; accanto al parametro $k = h/l$, qui si ha in più il parametro $\mu = d/l$ che nella schiera di Kàrmàn vale $1/2$.

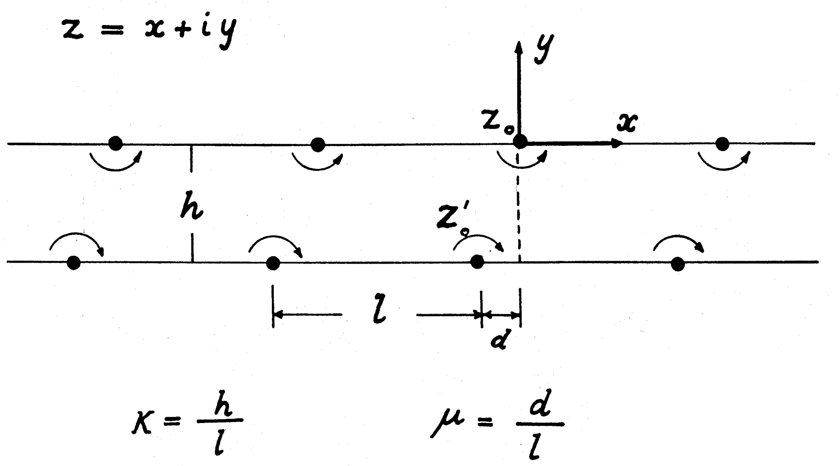

Fig. 1.

Gli Autori citati studiarono la stabilità di schiere siffatte, giungendo a trovarne la condizione

$$\sin \pi\mu = \operatorname{sh} \pi k \tag{1}$$

che, contrariamente a quanto ritenuto inizialmente, è soltanto necessaria ma non sufficiente.

Domm [3] riprese il problema per dimostrare che la condizione di Maue determinava le configurazioni delle doppie schiere che erano stabili per perturbazioni del primo ordine ma instabili per perturbazioni del secondo ordine, essendo invece sempre instabili al primo ordine le configurazioni non soddi-

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1964.

sfacenti alla [1]; come caso particolare, $\mu = 1/2$, si otteneva la nota condizione per la schiera di Kàrmàn.

Nella Nota presente ci proponiamo di mostrare assai semplicemente che queste conclusioni non sono corrette e che le doppie schiere generalizzate sono sempre e totalmente instabili per qualunque perturbazione possibile.

Mostreremo ciò sempre nell'ambito dello schema di moto irrotazionale piano di fluido perfetto, incomprimibile, illimitato.

Il potenziale complesso, ottenuto sommando i potenziali relativi alle due file di vortici, è:

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0')} \tag{2}$$

dove Γ è l'intensità di un singolo vortice, e $z_0' = z_0 - d - ih = z_0 - \mu l - ikl$, essendosi posto $\mu = d/l$ e $k = h/l$.

Prima di effettuare la verifica di stabilità, calcoliamo la velocità di traslazione della schiera vorticosa rispetto al fluido, vale a dire la velocità indotta da tutti i vortici su uno solo, ad esempio, quello posto in z_0; dalla (2) si ottiene:

$$(u - iv)_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(z - z_0) - \frac{\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(z - z_0') - \frac{1}{z - z_0} \right] \tag{3}$$

e di conseguenza

$$u_0 - iv_0 = -\frac{\Gamma}{2il} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(z_0 - z_0') . \tag{4}$$

Ricordando ora che $z_0' = z_0 - \mu l - ikl$, separando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario, si ha:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\Gamma}{2l} \dfrac{\operatorname{cotgh} \pi k (1 + \operatorname{cotg}^2 \pi\mu)}{\operatorname{cotgh}^2 \pi k + \operatorname{cotg}^2 \pi\mu} \\ v_0 = \dfrac{\Gamma}{2l} \dfrac{\operatorname{cotg} \pi\mu (1 - \operatorname{cotgh}^2 \pi k)}{\operatorname{cotgh}^2 \pi k + \operatorname{cotg}^2 \pi\mu} \end{cases} . \tag{5}$$

Se vogliamo ora che sia soddisfatta la (1), che si tratti cioè, secondo Domm, di schiera a instabilità differita, dovrà essere ovviamente:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\Gamma}{4l} \dfrac{\sqrt{1 + \sin^2 \pi\mu}}{\sin \pi\mu} \\ v_0 = -\dfrac{\Gamma}{4l} \operatorname{cotg} \pi\mu \end{cases} . \tag{6}$$

Si vede da queste formule che la schiera di Kàrmàn ($\mu = 1/2$) è l'unica avente velocità di traslazione diretta secondo l'asse delle x, con la stessa direzione quindi dell'allineamento dei vortici; risulta anche che questa schiera è quella avente minima velocità di traslazione (che al variare di μ da $1/2$ a 0 tende all'infinito), e, come conseguenza della (1) è la schiera avente maggior rapporto $h/l = 0{,}280 \ldots$

Tutto ciò consegue dalla teoria di Domm; potremmo anche aggiungere che la schiera di Kàrmàn è anche l'unica, a quanto ci consta, a essere stata osservata. Anche lo scrivente ha condotto una serie di esperienze nell'Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna, esaminando il comportamento di ostacoli cilindrici con sezione dissimetrica in vario modo rispetto all'asse della corrente, posti normalmente al fondo in un canale liscio della larghezza di un metro. Il diametro medio degli ostacoli era di ~ 3 cm; essi erano investiti da una corrente uniforme regolarizzata a monte, a 4 m di distanza, da griglie e reti metalliche. La riflessione di una sorgente luminosa estesa permettava di seguire chiaramente le tracce dei vortici sulla superficie libera della corrente; non si è mai riusciti ad osservare schiere in altre configurazioni del tipo (1) al di fuori di quella di Kàrmàn quando si sperimentava con cilindri circolari.

Passiamo ora alla verifica di stabilità; se la condizione di Maue (1) è anche sufficiente, oltre che necessaria, per garantire la stabilità dell'equilibrio al 1° ordine, ripetendo un procedimento già usato nella verifica della stabilità delle schiere di Kàrmàn, vincolando maggiormente il sistema, questo, per il teorema di Lord Rayleigh sui sistemi con vincoli aggiunti, dovrà essere stabile a maggior ragione purché valga la (1).

Essendo rispettate le condizioni per l'applicabilità del teorema di Lord Rayleigh, costruiamo una doppia schiera generalizzata con assegnati valori di μ e k, e vincoliamo tutti i vortici a restare immobili, tranne uno; ad esempio quello posto in z_0.

Dalla (3), calcoliamo la variazione di velocità indotta del vortice posto in z_0, dando a questo uno spostamento infinitesimo $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$; nota la formula

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) \tag{7}$$

si ricava dalla (3) con semplici passaggi, il valore di $\frac{d\xi_0}{dt} - i\frac{d\eta_0}{dt}$, variazione di $u_0 - iv_0$ per un incremento ζ_0 infinitesimo del primo ordine rispetto a z_0.

Si ha:

$$\frac{d\xi_0}{dt} - i\frac{d\eta_0}{dt} = -\frac{\Gamma\zeta_0}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 l^2} + \frac{\Gamma\pi}{2il^2}\,\frac{\zeta_0}{\sin^2\frac{\pi}{l}(z_0 - z_0')}\,. \tag{8}$$

Ma ricordando il valore di z_0', di ζ_0, di μ e di k, e nota la somma,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

risulta ancora:

$$\frac{d\xi_0}{dt} - i\frac{d\eta_0}{dt} = \frac{i\pi\Gamma}{2l^2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\sin^2\pi(\mu + ik)}\right](\xi_0 + i\eta_0). \tag{9}$$

In conseguenza di ciò, uguagliando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario, otteniamo:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_0}{dt} = \dfrac{\pi\Gamma}{2\,l^2}\left(\beta\xi_0 + \alpha\,\eta_0 - \dfrac{\eta_0}{3}\right) \\[2ex] \dfrac{d\eta_0}{dt} = \dfrac{\pi\Gamma}{2\,l^2}\left(\alpha\xi_0 - \dfrac{\xi_0}{3} - \beta\eta_0\right) \end{cases}$$

dove è

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\sin^2\pi\mu\,\mathrm{ch}^2\,\pi k - \cos^2\pi\mu\,\mathrm{sh}^2\,\pi k}{(\mathrm{ch}^2\,\pi k - \cos^2\pi\mu)^2} \\[2ex] \beta = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin 2\,\pi\mu\,\mathrm{sh}\,2\,\pi k}{(\mathrm{ch}^2\,\pi k - \cos^2\pi\mu)^2} \end{cases}$$

Dovendosi però la schiera trovare in una configurazione retta dalla (1), le (11) si ridurranno, per sostituzione di $\mathrm{sh}\,\pi k$ con $\sin\pi\mu$, alla forma:

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \beta = -\dfrac{\sqrt{1-\sin^4\pi\mu}}{2\sin^2\pi\mu} \end{cases}$$

Nel piano ξ_0, η_0 possiamo allora studiare il punto singolare nell'origine, posizione di equilibrio, relativo alle soluzioni dell'equazione:

$$(13)\qquad \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{C\xi_0 + D\eta_0}{A\xi_0 + B\eta_0}$$

ottenuta facendo il rapporto delle (10).

Nella (13), i coefficienti A, B, C, D, scritti secondo l'uso corrente, valgono:

$$(14)\qquad \begin{cases} A = -\dfrac{\sqrt{1-\sin^4\pi\mu}}{2\sin^2\pi\mu} \\[2ex] B = \dfrac{1}{6} \\[2ex] C = \dfrac{1}{6} \\[2ex] D = \dfrac{\sqrt{1-\sin^4\pi\mu}}{2\sin^2\pi\mu} \end{cases}$$

L'equazione caratteristica della (13) ha il discriminante

$$(15)\qquad \Delta = (A-D)^2 + 4\,BC = \frac{1-\sin^4\pi\mu}{\sin^4\pi\mu} + \frac{1}{9}$$

che è sempre positivo per ogni valore di μ positivo (ai nostri scopi è sufficiente sia $\Delta > 0$ per $0 < \mu \leq 1/2$, i valori negativi di μ non hanno evidentemente senso).

Il termine $AD - BC$ è invece sempre negativo per i valori corrispondenti di μ:

$$AD - BC = -\frac{1-\sin^4\pi\mu}{4\sin^4\pi\mu} - \frac{1}{36}$$

ciò che ci assicura dell'esistenza del punto singolare nell'origine che risulta, per quanto detto, un colle.

L'analisi ora fatta, con le equazioni linearizzate, nel campo cioè del 1° ordine, ci ha consentito di stabilire che la posizione di equilibrio per un vortice, nella configurazione assegnata, è di equilibrio instabile. Essendo quindi instabile in una determinata situazione, il sistema non potrà divenire stabile con la soppressione di vincoli; e questo per il già citato teorema di Lord Rayleigh.

È inutile estendere la ricerca ai termini di 2° ordine perché un noto teorema di Liapounoff assicura che se nell'equazione linearizzata è $AD - BC \neq 0$ e A, B, C, D non tutti nulli, la risposta all'analisi è corretta anche con l'equazione non lineare, e la singolarità è del medesimo tipo.

Con questo è dimostrato che qualunque possibile doppia schiera di vortici, rispondente alle condizioni (1) di Maue, è totalmente instabile per qualsiasi perturbazione; resta solo da spiegare il fatto, già segnalato in precedenza, che di tutte queste possibili schiere, l'unica a realizzarsi effettivamente è quella di Kàrmàn [4].

A questo scopo occorre tener presente che detta schiera, posto $\mu = 1/2$ nelle (6), risulta avere la minima velocità di traslazione possibile; a ciò corrisponde, in questa situazione, anche un minimo per la energia cinetica del sistema.

Ne risulta di conseguenza che è anche minima, per la schiera di Kàrmàn, la resistenza incontrata dal corpo che muovendosi produce i vortici, essendo minimo il lavoro delle forze che generano i vortici stessi.

È allora da ritenersi che una qualsiasi delle altre configurazioni soddisfacenti alla (1) non possa verificarsi perché causerebbe un aumento della resistenza. Tuttavia, poiché l'unico modo per provocare sperimentalmente schiere diverse da quella di Kàrmàn consiste nell'usare corpi dissimmetrici, dato che la mancanza di simmetria toglie al distacco dei vortici quei caratteri di regolarità che consentono il formarsi della scia di Kàrmàn, l'ordine dei vortici, come si è osservato nelle esperienze eseguite, si disgrega dando luogo ad una scia irregolare, con un modestissimo aumento di resistenza rispetto a quella data dalla scia di Kàrmàn.

In conclusione non si verifica più alcuna schiera regolare: né quella di Kàrmàn per la dissimmetria del corpo, né quelle di Maue per l'impossibilità di far crescere la resistenza fino all'infinito per ostacoli sufficientemente dissimmetrici.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. MAUE, *Zur Stabilität der Kármánschen Wirbelstrasse*, «Z. angew. Math. u. Mech.», *20*, 129–136 (1940).

[2] B. DOLAPTSCHIEFF, «Compt. Rend. de l'Academie Bulgare des Sciences» (1943).

[3] U. DOMM, *Ueber Wirbelstrassen von geringster Instabilität*, «Z. angew. Math. u. Mech.», *36*, 367–371 (1957).

[4] G. PEZZOLI, *Sulla stabilità delle schiere di vortici – La doppia schiera di Bénard-Kàrmàn*, «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», n. 2 (1964).