Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sulle deformazioni finite di una volta: caso tridimensionale. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.3, p. 340–346.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_3_340_0>

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite di una volta: caso tridimensionale.* Nota I di GIORGIO FERRARESE, presentata [*] dal Socio G. KRALL.

In un recente lavoro (cfr. [3]) sono pervenuto ad alcuni semplici risultati *esatti* sulle deformazioni delle piastre nell'ambito della teoria tridimensionale. Tra l'altro ho riconosciuto che le caratteristiche *non linearizzate* di deformazione sono espresse da polinomi di 2° grado nella distanza dalla superficie mediana e che, a moltiplicare le successive potenze, figurano proprio i coefficienti della *prima*, *seconda* e *terza forma quadratica fondamentale della superfice mediana deformata*.

Rimaneva però la restrizione che, nella configurazione di riferimento, la superficie mediana della piastra fosse piana. Affrancandomi da tale ipotesi, quindi considerando una generica *volta*, anziché una piastra piana, riprendo in esame, in questa Nota I, lo stesso tipo di spostamento, al fine di determinare le caratteristiche di deformazione complete. L'analisi tridimensionale mette in evidenza come esse, e insieme il coefficiente di dilatazione cubica, risultino ora dal quoziente di polinomi di 2° grado nella distanza dalla superficie mediana; al tempo stesso suggerisce, per il caso di uno schema bidimensionale, delle caratteristiche di deformazione *diverse* da quelle – generalmente in uso – introdotte dal Love (cfr. [6] cap. XXIV). I legami tra i due tipi di caratteristiche di deformazione vengono successivamente esplicitati, dopo una breve rielaborazione della teoria del Love, in una Nota II. In ogni caso va rilevato fin d'ora che le caratteristiche di deformazione suggerite dalla teoria tridimensionale godono di una essenziale proprietà di invarianza, per altro non posseduta da quelle del Love; sì che a mio avviso sembra alquanto discutibile una espressione in uso del potenziale elastico flessionale di una volta che di queste si vale.

In una Nota III vengono esplicitate le caratteristiche di deformazione fino alla parte di 2° ordine delle componenti di spostamento del punto generico della superficie mediana, utilizzando formule *esatte* precedentemente stabilite.

1. PREMESSE. – Siano: C e C′ due configurazioni di un sistema continuo tridimensionale; $\mathcal{C} \equiv O\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$ una terna cartesiana di riferimento prefissata; $P \equiv (y_\alpha)$ e $P' \equiv (y'_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, due punti corrispondenti nello spostamento $C \to C'$; (x_α) delle coordinate curvilinee di P, anche non ortogonali.

Suppongo che in C il sistema si presenti come una *volta* di superficie mediana Σ, ammettendo che nello spostamento considerato:

(*) Nella seduta del 14 marzo 1964.

a) la famiglia delle superficie trasformate di quelle parallele a Σ ammetta per traiettorie ortogonali le linee corrispondenti alle rette n di C normali a Σ;

b) per ogni P sia nullo l'allungamento nella direzione di n.

Indico con Σ' la superficie trasformata di Σ, con Q e Q' punti corrispondenti delle due superficie. Suppongo poi che le superficie parallele a Σ siano rappresentate dalle equazioni $x_3 = \text{cost.}$, $x_3 = 0$ su Σ, e assumo su Σ', come linee coordinate, le immagini delle curve di Σ di equazioni $x_i = \text{var.}$ $(i = 1, 2)$ (1).

Usando coordinate curvilinee x_α fa comodo considerare, accanto alla configurazione C, l'altra, C_* che da essa si deduce (a meno di un inessenziale spostamento rigido) interpretando la x_α come coordinate cartesiane di un punto P_*, rispetto alla terna prefissata $\mathcal{C}$. Lo studio dello spostamento $C \to C'$ in coordinate curvilinee si può allora riportare a quello dello spostamento $C_* \to C'$ in coordinate cartesiane.

Nel seguito, anche adoperando, senz'altro avviso, i coefficienti di una omografia vettoriale, li intenderò sempre riferiti alla terna $\mathcal{C}$. Indicherò anche con $\sigma \equiv \left\| \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|$ l'omografia di spostamento relativa a $C_* \to C$ e con $\sigma' \equiv \left\| \frac{\partial y'_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|$ quella relativa allo spostamento $C_* \to C'$; con $g_{\alpha\beta}$ e $g'_{\alpha\beta}$ i coefficienti delle due omografie $K\sigma\sigma$ e $K\sigma'\sigma'$ (K simbolo di omografia coniugata), cioè i coefficienti delle due forme quadratiche che esprimono, mediante le variabili x_α, la metrica di C e C' rispettivamente.

È stato già osservato (cfr. [4] p. 348) che le differenze

$$g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \equiv 2\gamma_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{1}$$

individuano una omografia γ in corrispondenza biunivoca con l'omografia di deformazione ε dello spostamento $C \to C'$:

$$\gamma = K\sigma\varepsilon\sigma. \tag{2}$$

Nei prossimi numeri mi propongo di esplicitare, nelle ipotesi *a*) e *b*), l'omografia di deformazione ε in funzione delle componenti di spostamento.

2. L'OMOGRAFIA γ. – Tanto $C_* \to C'$, quanto $C_* \to C$, rientrano in un tipo di spostamento già preso in esame (cfr. [3]), in modo che l'omografia γ risulta in sostanza già determinata. Precisamente si ha, per lo spostamento $C_* \to C'$, prescindendo dalle caratteristiche $g'_{13} = 0, g'_{23} = 0, g'_{33} = 1$, cioè limitandoci a considerare la proiezione del tensore di deformazione sul piano $x_3 = \text{cost.}$:

$$g'_{ik} = a'_{ik} - 2\, b'_{ik}\, x_3 - (\mathcal{H}'\, b'_{ik} + \mathcal{K}'\, a'_{ik})\, x_3^2 \qquad (i, k = 1, 2). \tag{3}$$

(1) Convengo che gli indici latini varino da 1 a 2, gli indici greci da 1 a 3.

In questa formula le quantità a'_{ik} e b'_{ik} rappresentano i coefficienti della prima e seconda forma quadratica fondamentale di Σ', $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{K}'$ la curvatura media e la curvatura totale (2) rispettivamente:

$$
(4) \qquad \begin{cases} \mathcal{H}' = -\dfrac{1}{a'}\left(a'_{11}\, b'_{22} + a'_{22}\, b'_{11} - 2\, a'_{12}\, b'_{12}\right) \equiv -\, a'^{ik}\, b'_{ik} \\[2ex] \mathcal{K}' = \dfrac{b'}{a'} \qquad , \qquad a' = \det. \| a'_{ik} \| \, , \; b' = \det. \| b'_{ik} \| \, . \end{cases}
$$

Si noti che nella (3), a moltiplicare x_3^2, figurano i coefficienti della terza forma quadratica associata alla superficie Σ' (cfr. [1] p. 225).

In modo analogo, per lo spostamento $C_* \to C$, risulta

$$
(5) \qquad g_{ik} = a_{ik} - 2\, b_{ik}\, x_3 - (\mathcal{H}\, b_{ik} + \mathcal{K}\, a_{ik})\, x_3^2 ,
$$

essendo a_{ik} e b_{ik} i coefficienti delle due forme quadratiche di Σ, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ le curvature media e totale:

$$
(6) \qquad \begin{cases} \mathcal{H} = -\, a^{ik}\, b_{ik} \\[2ex] \mathcal{K} = \dfrac{b}{a} \qquad , \quad a = \det. \| a_{ik} \| \quad , \quad b = \det. \| b_{ik} \| \, . \end{cases}
$$

Posto allora, come dalla (1),

$$
(7) \qquad 2\, \gamma_{ik} = a'_{ik} - a_{ik} - 2\, (b'_{ik} - b_{ik})\, x_3 - (\mathcal{H}'\, b'_{ik} - \mathcal{H}\, b_{ik} + \mathcal{K}'\, a'_{ik} - \mathcal{K}\, a_{ik})\, x_3^2 ,
$$

il quadro dell'omografia γ viene ad essere del tipo

$$
(8) \qquad \gamma \equiv \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} .
$$

Come è naturale, *condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di* γ, *e quindi di* ε, *è che siano nulle le differenze* $a'_{ik} - a_{ik}$, $b'_{ik} - b_{ik}$; sì che queste possono a ragione assumersi come caratteristiche di deformazione sullo schema (bidimensionale) della sola superficie Σ (cfr. ad esempio [7], nonchè [2], p. 129). In effetti, come vedremo nella Nota II, sullo schema bidimensionale, le caratteristiche di deformazione vengono introdotte in modo assai diverso, almeno nella teoria ordinaria del Love.

Per completare la determinazione di γ non resta ormai che esplicitare le differenze suddette in funzione dello spostamento del punto generico Q della superficie Σ. A questo scopo introduciamo, nel punto Q, la terna $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ costituita dai vettori $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\partial\, \mathrm{O\,Q}}{\partial x_i}$ $(i = 1\, , 2)$ tangenti alle linee coordinate prescelte e dal versore $\boldsymbol{e}_3$ della normale a Σ, tenendo conto delle formule fondamentali (cfr. ad esempio [5] p. 228)

$$
(9) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x_j} = \left\{ {h \atop ji} \right\} \boldsymbol{e}_h + b_{ji}\, \boldsymbol{e}_3 \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial x_j} = -\, b_j{}^i\, \boldsymbol{e}_i \qquad (i\, , j\, , h = 1\, , 2).
$$

(2) In realtà la $(4)_2$ non corrisponde alla definizione di $\mathcal{K}'$, notoriamente legata alla prima forma quadratica, ma all'equazione di Gauss che nelle nostre ipotesi è certo soddisfatta, figurando Σ' come assegnata.

Fa comodo considerare anche la terna *duale* $\{\boldsymbol{e}^\alpha\}$ così definita:

$$(10)\qquad \boldsymbol{e}^i = a^{ik}\,\boldsymbol{e}_k \quad , \quad \boldsymbol{e}^3 = \boldsymbol{e}_3 .$$

Essa è manifestamente in corrispondenza biunivoca con la precedente e soddisfa alle identità

$$(11)\qquad \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta \qquad (\alpha\,,\beta = 1\,,2\,,3),$$

in modo che, insieme alla (9), si ha

$$(9')\qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x_j} = -\left\{ {i \atop jh} \right\} \boldsymbol{e}^h + b_j{}^i\,\boldsymbol{e}^3 \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}^3}{\partial x_j} = -\,b_{ji}\,\boldsymbol{e}^i .$$

Per lo spostamento $\boldsymbol{s} \equiv QQ'$ del punto generico di Σ porremo, in corrispondenza,

$$(12)\qquad \boldsymbol{s} = u^\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha \qquad \text{ovvero} \qquad \boldsymbol{s} = u_\alpha\,\boldsymbol{e}^\alpha ,$$

a seconda che interessino le componenti secondo la prima o la seconda delle due terne considerate. Useremo anche le notazioni abbreviative

$$(13)\qquad u^\alpha{}_{/j} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_j} + \begin{cases} \left\{ {\alpha \atop jh} \right\} u^h - b_j{}^\alpha\,u^3 & \text{per} \quad \alpha = 1\,,2 \\ b_{ji}\,u^i & \text{per} \quad \alpha = 3, \end{cases}$$

nonché

$$(13')\qquad u_{\alpha/j} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \begin{cases} -\left\{ {h \atop j\alpha} \right\} u_h - b_{j\alpha}\,u_3 & \text{per} \quad \alpha = 1\,,2 \\ b_j{}^i\,u_i & \text{per} \quad \alpha = 3, \end{cases}$$

che consentono di scrivere, in parallelo alla (12),

$$(14)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_j} = u^\alpha_{/j}\,\boldsymbol{e}_\alpha \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_j} = u_{\alpha/j}\,\boldsymbol{e}^\alpha .$$

Indicando, come abbiamo già fatto, con un apice gli elementi relativi alla superficie Σ', potremo scrivere intanto

$$(15)\qquad \boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_i + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_i} ,$$

nonché

$$(16)\qquad \boldsymbol{e}'_3 \equiv \frac{1}{a'}\,\boldsymbol{e}'_1 \wedge \boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{a'}\left(a\,\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_2} - \boldsymbol{e}_2 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_2}\right).$$

D'altra parte si ha identicamente $\boldsymbol{e}_\alpha \wedge \boldsymbol{e}_{\alpha+1} = a\,\boldsymbol{e}^{\alpha+2}$, come si controlla moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{e}_{\alpha+2}$, quindi la (16), avuto riguardo alla $(14)_1$, assume la forma

$$(17)\qquad \boldsymbol{e}'_3 = \frac{a}{a'}\,[n_i\,\boldsymbol{e}^i + (1 + n_3)\,\boldsymbol{e}^3] ,$$

ove si è posto

$$(18)\qquad \begin{cases} n_1 = -\left(u^3_{/1} + u^3_{/1} u^2_{/2} - u^3_{/2} u^2_{/1}\right) \\ n_2 = -\left(u^3_{/2} + u^3_{/2} u^1_{/1} - u^3_{/1} u^1_{/2}\right) \\ n_3 = u^1_{/1} + u^2_{/2} + u^1_{/1} u^2_{/2} - u^1_{/2} u^2_{/1} . \end{cases}$$

Di qui si ricava poi, essendo e'_3 vettore unitario,

$$(19)\qquad \frac{a'}{a} = \sqrt{1 + \mathrm{R}}$$

con

$$(20)\qquad \mathrm{R} = n_3 (2 + n_3) + n^i n_i .$$

Si noti che il rapporto a'/a, diminuito dell'unità, rappresenta tra l'altro il coefficiente di dilatazione cubica in Q relativo allo spostamento $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$.

Si hanno così tutti gli elementi per esplicitare, in funzione delle componenti di spostamento, le quantità $a'_{ik} = e'_i \cdot e'_k$ e $b'_{ik} = \frac{\partial e'_k}{\partial x_i} \cdot e'_3$. Precisamente si ha, in base alle (15), (17) e (19),

$$\begin{cases} a'_{ik} = a_{ik} + e_i \cdot \frac{\partial s}{\partial x_k} + e_k \cdot \frac{\partial s}{\partial x_i} + \frac{\partial s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_k} \\ b'_{ik} = \left(\frac{\partial e_k}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_k}\right) \cdot \frac{(1 + n_3)\, e^3 + n_i\, e^i}{\sqrt{1 + \mathrm{R}}} \end{cases}$$

ovvero, avuto riguardo alle (14) e (9),

$$(21)\qquad \begin{cases} a'_{ik} = a_{ik} + u_{i/k} + u_{k/i} + u^{\alpha}_{/i}\, u_{\alpha/k} \\ b'_{ik} = \dfrac{(1 + n_3)\left(b_{ik} + \dfrac{\partial u^3_{/k}}{\partial x_i} + b_{ih} u^h_{/k}\right) + n_h \left(\left\{ {h \atop ik} \right\} + \dfrac{\partial u^h_{/k}}{\partial x_i} + \left\{ {h \atop il} \right\} u^l_{/k} - b_i^{\,h} u^3_{/k}\right)}{\sqrt{1 + \mathrm{R}}} . \end{cases}$$

Si rilevi, a titolo di controllo della $(21)_2$, che la proprietà di simmetria $b'_{ik} = b'_{ki}$ segue direttamente dalle equazioni di Codazzi, $\nabla_r b_{ik} = \nabla_k b_{ir}$ relative alla superficie Σ (∇_r simbolo di derivata covariante su Σ:

$$\nabla_r b_{ik} \equiv \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_r} - \left\{ {h \atop ri} \right\} b_{hk} - \left\{ {h \atop rk} \right\} b_{ih} \Big) .$$

3. L'OMOGRAFIA DI DEFORMAZIONE ε. – Poiché, in base alla (2), è

$$(22)\qquad \gamma_{\alpha\beta} = c_\alpha \cdot \mathrm{K} \sigma \varepsilon \sigma c_\beta \equiv \sigma c_\alpha \cdot \varepsilon \sigma c_\beta ,$$

i coefficienti di γ rispetto a $\mathcal{T}$ coincidono con quelli di ε rispetto alla terna definita dai vettori $\sigma c_\alpha = \frac{\partial \mathrm{OP}}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha = 1 , 2 , 3)$, in generale non ortogonale. D'altra parte, potendosi scrivere $\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} + x_3 e_3$ (Q proiezione ortogonale di P su Σ) si ha, per derivazione,

$$\frac{\partial \mathrm{OP}}{\partial x_i} = e_i + x_3 \frac{\partial e_3}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{OP}}{\partial x_3} = e_3$$

ovvero, avuto riguardo alla $(9)_2$,

$$\sigma \boldsymbol{c}_i = (\delta_i^k - x_3\, b_i^{\ k})\, \boldsymbol{e}_k \quad , \quad \sigma \boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{e}_3 . \tag{23}$$

Di qui è agevole ricavare i vettori $\boldsymbol{e}_i$ mediante i trasformati $\sigma \boldsymbol{c}_i$ e determinare così i coefficienti dell'omografia di deformazione secondo la terna $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$. Precisamente si ha, essendo in base alla (6) $\mathcal{H} = - b_i^{\ i}$, $\mathcal{K} = det. \| b_i^{\ k} \|$,

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{(1 - x_3\, b_2^{\ 2})\, \sigma \boldsymbol{c}_1 + x_3\, b_1^{\ 2}\, \sigma \boldsymbol{c}_2}{1 + \mathcal{H}\, x_3 + \mathcal{K}\, x_3^2} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{x_3\, b_2^{\ 1}\, \sigma \boldsymbol{c}_1 + (1 - x_3\, b_1^{\ 1})\, \sigma \boldsymbol{c}_2}{1 + \mathcal{H}\, x_3 + \mathcal{K}\, x_3^2} \end{aligned}\right.$$

e quindi in definitiva, avuto riguardo alla (22),

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{(1 - x_3\, b_2^{\ 2})^2\, \gamma_{11} + 2 x_3\, b_1^{\ 2}\, (1 - x_3\, b_2^{\ 2})\, \gamma_{12} + x_3^2\, (b_1^{\ 2})^2\, \gamma_{22}}{(1 + \mathcal{H}\, x_3 + \mathcal{K}\, x_3^2)^2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{x_3\, b_2^{\ 1}\, (1 - x_3\, b_2^{\ 2})\, \gamma_{11} + [x_3^2\, b_1^{\ 2}\, b_2^{\ 1} + (1 - x_3\, b_1^{\ 1})\, (1 - x_3\, b_2^{\ 2})]\, \gamma_{12} + x_3\, b_1^{\ 2}\, (1 - x_3\, b_1^{\ 1})\, \gamma_{22}}{(1 + \mathcal{H}\, x_3 + \mathcal{K}\, x_3^2)^2} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{x_3^2\, (b_2^{\ 1})^2\, \gamma_{11} + 2 x_3\, b_2^{\ 1}\, (1 - x_3\, b_1^{\ 1})\, \gamma_{12} + (1 - x_3\, b_1^{\ 1})^2\, \gamma_{22}}{(1 + \mathcal{H}\, x_3 + \mathcal{K}\, x_3^2)^2} . \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Le formule (24) notevolmente si semplificano se si suppone, senza restrizione essenziale, che le linee coordinate $x_i =$ var. siano linee di curvatura di Σ; ciò che comporta l'ortogonalità della terna $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$. Si ha in tal caso $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$ nonché, indicando con R_i $(i = 1, 2)$ i raggi di curvatura principali di Σ (presi col segno $+$ se la normale è orientata dalla parte della convessità della superficie, col segno $-$ nel caso opposto)

$$b_{ii} = - \frac{a_{ii}}{R_i} \qquad (i = 1, 2). \tag{25}$$

La $(23)_1$ assume allora la forma $\sigma \boldsymbol{c}_i = \left(1 + \frac{x_3}{R_i}\right) \boldsymbol{e}_i$ e il quadro dei coefficienti dell'omografia di deformazione, avuto riguardo alla (24), viene ad essere:

$$\varepsilon \equiv \left\| \begin{matrix} \dfrac{\gamma_{11}}{\left(1 + \dfrac{x_3}{R_1}\right)^2} & \dfrac{\gamma_{12}}{\left(1 + \dfrac{x_3}{R_1}\right)\left(1 + \dfrac{x_3}{R_2}\right)} & 0 \\ \dfrac{\gamma_{12}}{\left(1 + \dfrac{x_3}{R_1}\right)\left(1 + \dfrac{x_3}{R_2}\right)} & \dfrac{\gamma_{22}}{\left(1 + \dfrac{x_3}{R_2}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| . \tag{26}$$

Al tempo stesso il coefficiente di dilatazione cubica risulta espresso dalla formula (cfr. [3] p. 199)

$$\delta_c = \frac{a' (1 + \mathcal{H}'\, x_3 + \mathcal{K}'\, x_3^2)}{a (1 + \mathcal{H}\, x_3 + \mathcal{K}\, x_3^2)} - 1 . \tag{27}$$

Si vede bene di qui che *la condizione di inestendibilità della superficie* Σ, $a'_{ik} = a_{ik}$ *non corrisponde alla ipotesi di incomprimibilità*, $\delta_c = 0$ per lo spostamento $C \rightarrow C'$. Quest'ultima si traduce infatti nelle seguenti condizioni:

$$a' = a \quad , \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} \quad , \quad \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$$

ed involge pertanto, come è naturale, anche la seconda forma quadratica della superficie Σ'.

Riferimenti bibliografici.

[1] Bianchi L., *Lezioni di geometria differenziale*, III ed., vol. I, Zanichelli, Bologna (1927).

[2] Budiansky B.–Sanders J. L., *On the «best» first-order linear shell theory*, «Progress in Applied Mechanics», The Macmillan Company, New York (1962).

[3] Ferrarese G., *Sulle deformazioni delle piastre*, «Rendiconti di Matematica» (1–2), vol. 19, p. 193.

[4] Ferrarese G., *Sulle deformazioni finite di un solido tubolare a direttrice curvilinea*, «Rendiconti dei Lincei», serie VIII, vol. XXVII, p. 347.

[5] Finzi B. e Pastori M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna (1949).

[6] Love A. E. H., *A Treatise on the mathematical theory of elasticity*, IV ed., The University Press, Cambridge (1952).

[7] Novozhilov V. V., *The theory of thin shells* (tradotto dall'inglese), P. Noordhoff, Groningen (1959).