Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

József Molnár

Sui sistemi di punti con esigenza di spazio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.3, p. 336–339.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_3_336_0>

Geometria. — *Sui sistemi di punti con esigenza di spazio.* Nota di JÓZSEF MOLNÁR, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

Come si deve piantare in un «grande» territorio – devoluto ad uso di frutteto – il massimo numero di alberi, in modo che nessuno di questi venga a trovarsi dagli altri a distanza minore di una data?

È noto che, nella migliore collocazione, gli alberi formano un reticolo regolare avente il simbolo $\{3,6\}$.

Questo problema equivale al seguente: Come si debbono collocare su un «grande» territorio punti con densità massima, in modo che intorno ad ognuno dei punti, nel cerchio di dato raggio a, non ci sia nessun altro punto del sistema?

Onde generalizzare il problema, è opportuno porre la seguente definizione: Intendiamo per *esigenza di spazio* del punto P_i del sistema di punti $\{P_i\}$ un insieme chiuso di punti nell'interno del quale non vi sia alcun punto del sistema all'infuori di P_i. Se ogni punto P_i ha esigenza di spazio congruente ad un dato insieme E, in modo che in tale congruenza P_i abbia per immagine un dato punto P di E, allora il sistema di punti verrà chiamato un *sistema di punti con esigenza di spazio E*.

Nel problema precedente, l'esigenza di spazio era un cerchio di raggio a, di cui P era il centro.

Che cosa possiamo dire della densità di un sistema di punti, nel caso in cui l'esigenza di spazio del sistema di punti debba essere un dato insieme arbitrario di punti?

Nella presente Nota ci occuperemo di problemi di questo tipo. Il risultato principale qui conseguito conduce a molti sistemi di punti estremali, e può venire agevolmente generalizzato agli spazi ad n-dimensioni di curvatura costante.

Qui ci limiteremo a considerare la densità dei sistemi di punti sulle superficie di curvatura costante, e più precisamente sulla sfera, sul piano euclideo e sul piano iperbolico.

Il quoziente $\frac{n(T)}{T}$ verrà chiamato la *densità* di un sistema di punti su una superficie di curvatura costante, rispetto al dominio T, dove si denoti con $n(T)$ il numero dei punti del sistema che si trovano nel dominio T e T designi altresì l'area di questo [1]. Se T è tutta una sfera, si ottiene in particolare così la densità di un sistema di punti rispetto alla sfera.

Si può definire, poi, la *densità* δ di un sistema numerabile di punti rispetto a tutto il piano euclideo, assumendo

$$\delta = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n\{C(R)\}}{C(R)}$$

(*) Nella seduta del 14 marzo 1964.

(1) Per un dominio e per la sua area usiamo lo stesso simbolo.

dove C(R) denoti un cerchio di raggio R e centro un punto O fissato comunque nel piano. Si può dimostrare che δ non dipende dalla scelta di O. Sul piano iperbolico, la definizione appare più difficile; (2) ivi è opportuno accettare per estremo superiore della densità un numero $d \leqq 1$, se si può dare una decomposizione del piano in celle, in ciascuna delle quali la densità dei punti risulti $\leqq d$.

TEOREMA. – *La densità di un sistema di punti* $\{P_i\}$ *con esigenza di spazio* E *su una superficie di curvatura costante è sempre* $\leqq 1/A$, *dove con* A *si*

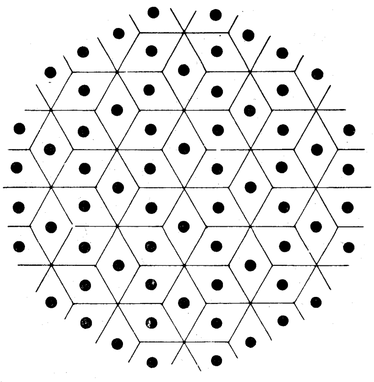

Fig. 1.

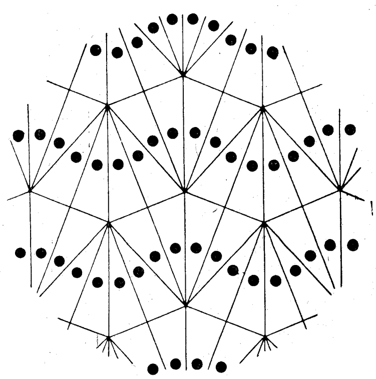

Fig. 2.

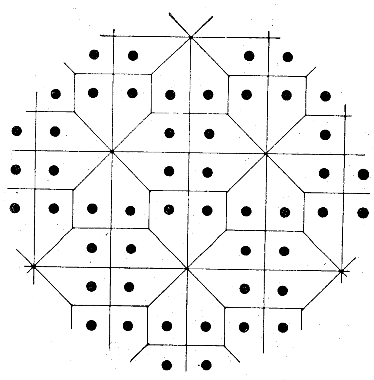

Fig. 3.

denoti l'inviluppo convesso dei centri dei cerchi che passano il punto P *e appartengono alla esigenza di spazio* E.

L'estremo superiore è, in molti casi effettivamente raggiunto. Questo avviene per ogni sistema di punti in cui la decomposizione in celle Dirichlet fornisce celle di area A. Così, per esempio, vale il segno di uguaglianza se il sistema di punti è di uno dei tipi omogenee studiati da Niggli [12], [13] e da Sinogowitz [14] (3).

(2) Ved. per esempio MOLNÁR [11].

(3) Un sistema di punti dicesi *omogeneo* (*regolare*), se per due punti qualsiasi del sistema esiste una congruenza che muti l'un punto nell'altro, mentre il sistema si trasformi in se stesso. La fig. 1 illustra un sistema estremale di punti o m o g e n e o. Nelle figg. 2 e 3 figurano configurazioni estremali di punti i n o m o g e n e e. È interessante osservare che, nella fig. 2, i vertici delle celle di Dirichlet hanno lo stesso simbolo (8, 4, 4) di Laves.

Dimostrazione. – Per provare il teorema, basta riconoscere che la cella D_i di Dirichlet (o poligono di Voronoi (4)) di un punto arbitrario P_i del sistema di punti $\{P_i\}$ contiene il dominio A; e questo è una conseguenza semplice della definizione di cella di Dirichlet D_i.

OSSERVAZIONI. – 1° Sia $\{P_i\}$ un sistema di punti con esigenza di spazio E. Si dice *esigenza ridotta di spazio* l'unione di cerchi contenuti nel dominio E e passanti per il punto P_i. L'inviluppo convesso dei centri di questi cerchi dicesi il *nucleo*. Ovviamente, l'estremo superiore dato dal teorema dipende solamente dal nucleo. Si giunge pertanto allo stesso estremo superiore se si cambia E in modo che l'area del nucleo dell'esigenza ridotta di spazio non muti.

2° Si riconosce facilmente che il teorema può venire esteso a sistemi di punti con esigenza di spazio collocati in domini convessi. Menzioniamo, a questo riguardo, che possiamo generalizzare il teorema più ampio, che così si ottiene, agli spazi ad n–dimensioni ($n \geqq 3$) di curvatura costante.

3° I cerchi che forniscono l'esigenza ridotta di spazio, saranno chiamati i *componenti*. Si può dare, analogamente al caso dei sistemi di cerchi con esigenza di spazio (5), un estremo superiore « buono » per la densità di certi sistemi di punti $\{P_i\}$, anche se l'esigenza di spazio E_i varia da punto a punto. In questo caso, l'estremo superiore si presenta come una funzione della variazione dei componenti.

4° Si intenda per sistema di punti con *esigenza di punto* un sistema tale che per ogni punto sia dato un dominio ove si esiga l'esistenza di un altro punto del sistema. I sistemi di punti con esigenza di punto godono di proprietà simili a quelle dianzi indicate. La trattazione di queste ricerche verrà fatta in altro lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. S. M. COXETER, *Introduction to geometry*, New York–London (1961).
[2] G. L. DIRICHLET, *Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten Zahlen*, « J. für die reine und angew. Math. », *40*, 209–227, 1850.
[3] L. FEJES TOTH, 1. *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin–Heidelberg–Gottingen 1953.
[4] — 2. *Regular figures*, Oxford–London–New York–Paris, 1964.
[5] V. LAVES, *Ebenenteilung und Koordinationszahl*, « Z. Kristallogr. », *78*, 208–241 (1931).
[6] J. MOLNÁR, 1. *Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante*, « Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX, vol. I, 61–72, (1962).
[7] — 2. *Alcune generalizzazioni del teorema di Segre–Mahler*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », *30*/5, 700–705 (1961).
[8] — 3. *Körelhelyezések állandó görbületü felületeken*, « Magyar Tud. Akad. Oszt, Közl », *12*, 224–263 (1962).
[9] — 4. *Estensione del teorema di Segre–Mahler allo spazio*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », *35*/3–4, 166–168 (1963).

(4) Ved. COXETER [1], 53.
(5) Ved. MOLNÁR [11].

[10] — 5. *Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung*, «Math. Annalen» (in corso di stampa).

[11] — 6. *Alcuni risultati di geometria discreta*, Conferenze del Sem. di Mat. dell'Università di Bari (in corso di stampa).

[12] P. NIGGLI, 1. *Die topologische Strukturanalyse*, I, «Z. Kristallogr.», *65*, 391–415 (1927).

[13] — 2. *Die topologische strukturanalyse*, II «Z. Kristallogr.», *68*, 404–466, (1928).

[14] U. SINOGOWITZ, 1. *Die Kreislagen und Packungen Kongruenter Kreise in der Ebene*, «Z. Kristallogr.», *100*, 461–508 (1939).

[15] — 2. *Herleitung aller homogenen nicht kubische Kugelpackungen*, «Z. Kristallogr.», *105*, 23–52 (1943).