
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARMELO MAMMANA

Su certi interi che si conservano nel prodotto di corrispondenze cremoniane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.3, p. 329–335.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_3_329_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Su certi interi che si conservano nel prodotto di corrispondenze cremoniane*^(*). Nota di CARMELO MAMMANA, presentata^(**) dal Socio B. SEGRE.

1. Sia T una corrispondenza cremoniana di uno spazio proiettivo complesso S_r ad $r \geq 2$ dimensioni. La jacobiana $J(\kappa)$ di T in generale è spezzata; siano $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ gli ordini delle componenti irriducibili di $J(\kappa)$, e siano $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$ le loro molteplicità. Indichiamo con $\mu(T)$ il M.C.D. dei numeri μ_i (da porsi uguale a zero quando manchi la J) e con $\tau(T)$ il M.C.D. dei numeri τ_i ed $r+1$.

È noto⁽¹⁾ che si ha $\mu(T) = \mu(T^{-1})$. Nel n. 2 proviamo che si ha anche $\tau(T) = \tau(T^{-1})$. Nel n. 3 dimostriamo che, se V è un'altra corrispondenza cremoniana di S_r , allora $\tau(TV)$ è un multiplo di M.C.D. $[\tau(T), \tau(V)]$ e $\mu(TV)$ è un multiplo di M.C.D. $[\mu(T), \mu(V)]$, oppure è $\mu(TV) = 0$.

Nei nn. 4, 5 proviamo che se ρ è un divisore qualunque di $r+1$, allora l'insieme delle corrispondenze cremoniane T di S_r per cui $\tau(T)$ è divisibile per ρ non è vuoto ed è un gruppo $G_\tau^{(\rho)}$. Inoltre proviamo che se q è un intero non negativo qualunque, allora l'insieme delle corrispondenze cremoniane T di S_r per cui si ha $\mu(T) = sq$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) non è vuoto ed è un gruppo $G_\mu^{(q)}$.

Nei numeri successivi studiamo i gruppi $G_\mu^{(q)}$ e $G_\tau^{(q)}$ con particolare riguardo al caso $\rho = r+1$.

2. Siano:

$$(T) \quad \kappa'_i = f_i(\kappa) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad \kappa_i = g_i(\kappa'), \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi complessi S_r, S'_r ($r \geq 2$) e della sua inversa T^{-1} .

Indichiamo con $J(\kappa)$ la jacobiana di T , con $J'(\kappa')$ la jacobiana di T^{-1} e con $K(\kappa)$ ed $H(\kappa')$ le forme definite dalle identità:

$$g_i(f) = K(\kappa) \kappa_i \quad , \quad f_i(g) = H(\kappa') \kappa'_i \quad (i = 0, 1, \dots, r).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1964.

(1) O. H. KELLER, *Ganze Cremona Transformationen*, «Monatsch. f. Math. u. Phys.», vol. 47 (1939). Vedi anche: B. SEGRE, *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche*, «Annali di Matematica», ser. IV, tomo XLIII (1957); C. MAMMANA, *Su certe ipersuperficie analoghe alle jacobiane legate ad una corrispondenza cremoniana*, «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. XXVII, fasc. 6 (1959).

Ricordiamo che si ha ⁽²⁾:

$$(1) \quad J(g) J'(\kappa') = nm H^{r+1}(\kappa')$$

$$(2) \quad J'(f) J(\kappa) = nm K^{r+1}(\kappa).$$

dove n è il grado delle forme $f_i(\kappa)$ ed m è il grado delle forme $g_i(\kappa')$. Ricordiamo anche che le forme $J(\kappa)$ ed $J'(\kappa')$ hanno lo stesso numero t di componenti irriducibili distinte ⁽³⁾. Poniamo:

$$J(\kappa) = K_1^{\tau_1}(\kappa) K_2^{\tau_2}(\kappa) \cdots K_t^{\tau_t}(\kappa)$$

$$J'(\kappa') = H_1^{\tau'_1}(\kappa') H_2^{\tau'_2}(\kappa') \cdots H_t^{\tau'_t}(\kappa')$$

dove $K_1(\kappa), K_2(\kappa), \dots, K_t(\kappa)$ sono le componenti irriducibili distinte di $J(\kappa)$, ed $H_1(\kappa'), H_2(\kappa'), \dots, H_t(\kappa')$ sono le componenti irriducibili distinte di $J'(\kappa')$.

Abbiamo osservato altrove ⁽⁴⁾ che il *M.C.D. dei numeri* τ può non essere uguale al *M.C.D. dei numeri* τ'_i . Dimostriamo ora che il *M.C.D. dei numeri* $r+1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$ è sempre uguale al *M.C.D. dei numeri* $r+1, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_t$. Infatti per la (1) ogni divisore comune ai numeri $r+1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$ è anche un divisore comune ai numeri $r+1, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_t$; e viceversa, per la (2).

Nel seguito *indicheremo con* $\tau(T)$ *il M.C.D. dei numeri* $r+1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$ *relativi alla corrispondenza* T . Per quanto sopra:

a) *Si ha sempre:* $\tau(T) = \tau(T^{-1})$.

Se T è una omografia si ha $\tau(T) = r+1$. In generale è $1 \leq \tau(T) \leq r+1$.

Sia μ_j il grado della forma $K_j(\kappa)$. Nel seguito *indicheremo con* $\mu(T)$ *il M.C.D. dei numeri* $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ *relativi alla corrispondenza* T (se T è una omografia, $\mu(T) = 0$). Pertanto si ha $\mu(T) \geq 0$. È noto ⁽⁵⁾ che:

b) *Si ha sempre:* $\mu(T) = \mu(T^{-1})$.

3. Siano:

$$\kappa''_i = \varphi_i(\kappa') \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

le equazioni di un'altra corrispondenza cremoniana V , e siano:

$$\kappa''_i = \psi_i(\kappa) \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

le equazioni del prodotto TV . Indichiamo con $\vartheta(\kappa)$ la forma definita dalle identità $\varphi_i(f) = \vartheta(\kappa) \psi_i(\kappa)$, con n' il grado delle $\varphi_i(\kappa)$ e con n'' il grado delle $\psi_i(\kappa)$. Sia ha ⁽⁶⁾

$$n'' \left[\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(\kappa'_0, \kappa'_1, \dots, \kappa'_r)} \right]_{\kappa'=f} \frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_r)}{\partial(\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_r)} = n n' \vartheta_{(\kappa)}^{r+1} \frac{\partial(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_r)}{\partial(\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_r)}.$$

(2) C. MAMMANA, loc. cit. in ⁽¹⁾, n. 1.

(3) O. H. KELLER, loc. cit. in ⁽¹⁾, § 2.

(4) C. MAMMANA, loc. cit. in ⁽¹⁾, n. 8.

(5) O. H. KELLER, loc. cit. in ⁽¹⁾, § 2.

(6) G. DANTONI, *Sulla possibilità di decomporre una corrispondenza cremoniana fra spazi ad $r \geq 3$ dimensioni, nel prodotto di corrispondenze cremoniane di dato ordine*, « Annali di Matematica », ser. IV, tomo XXIX, (1949), n. 1.

Da questa identità, tenendo presente il significato degli interi $\tau(T)$, $\tau(V)$, $\tau(TV)$, segue subito che ogni divisore comune a $\tau(T)$ e $\tau(V)$ è anche un divisore di $\tau(TV)$, cioè:

a) L'intero $\tau(TV)$ è un multiplo del M.C.D. di $\tau(T)$ e $\tau(V)$.

Dimostriamo ora che:

b) L'intero $\mu(TV)$ è un multiplo del M.C.D. di $\mu(T)$ e $\mu(V)$, oppure $\mu(TV) = 0$.

La proprietà si verifica subito quando qualcuno dei tre interi n, n', n'' è uguale ad uno. Supponiamo che siano tutti e tre maggiori di uno.

Sia $q \geq 2$ un divisore comune a $\mu(T)$ e $\mu(V)$. Sia $F(x)$ una componente irriducibile della jacobiana di TV , e sia p il grado di $F(x)$. Dobbiamo dimostrare che q è un divisore di p .

Se $F(x)$ è una componente irriducibile della jacobiana di T , allora $\mu(T)$ è un divisore di p e quindi q è un divisore di p .

Supponiamo che $F(x)$ non sia una componente della jacobiana di T . In questa ipotesi l'ipersuperficie irriducibile $F(x) = 0$ è mutata birazionalmente dalla T in una ipersuperficie irriducibile, $\Phi(x') = 0$, che è una componente irriducibile della jacobiana di V e quindi ha per ordine un multiplo di q . Indichiamo con aq l'ordine di $\Phi(x') = 0$. Si ha inoltre:

$$F(g) = \Phi^h(x') \Psi(x')$$

con $h \geq 1$ e $\Psi(x')$ forma di grado $s \geq 0$ e non divisibile per $\Phi(x')$. Da questa segue:

$$F[g(f)] = K^p(x) F(x) = \Phi^h(f) \Psi(f).$$

Poiché $K(x)$ non è divisibile per $F(x)$, si ha $h = 1$ e quindi

$$(3) \quad K^p(x) F(x) = \Phi(f) \Psi(f);$$

da qui, considerando i gradi dei due membri, segue:

$$(4) \quad pnm = aqn + sn.$$

Per la (3) ogni componente irriducibile di $\Psi(f)$ è una componente irriducibile di $K(x)$ e quindi ha il grado divisibile per q . Ne segue che il grado sn di $\Psi(f)$ è divisibile per q e quindi, per la (4), pnm è divisibile per q . Ma dalla (7):

$$nm - 1 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_t v_t$$

segue che q , in quanto divisore di $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$, è primo sia con n sia con m ; quindi p è divisibile per q .

(7) C. MAMMANA, loc. cit. in (1), n. 5.

4. Sia $\rho \geq 1$ un qualunque divisore di $r+1$. Consideriamo la corrispondenza quadratica T_ρ di tipo $(2, 2)$ di equazioni ⁽⁸⁾:

$$\begin{cases} x'_0 = x_r x_0 + x_{r-1}^2 \\ x'_i = x_r x_i & i = 1, 2, \dots, \rho-1 \\ x'_j = x_{r-1} x_j & j = \rho, \rho+1, \dots, r. \end{cases}$$

La jacobiana di T_ρ è $J(x) = 2 x_{r-1}^{r+1-\rho} x_r^\rho$, quindi è $\tau(T_\rho) = \rho$.

Risulta così provato che:

a) *Fissato comunque un divisore ρ di $r+1$, esistono corrispondenze cremoniane T di S_r per le quali si ha $\tau(T) = \rho$. Anzi di tali corrispondenze ne esistono già nella classe delle corrispondenze quadratiche di tipo $(2, 2)$.*

Dimostriamo ora che:

b) *Fissato comunque un intero $q \geq 0$, esistono corrispondenze cremoniane T di S_r per le quali si ha $\mu(T) = q$.*

Infatti, per $q=0$ basta considerare una omografia. Per $q=1$ basta considerare una corrispondenza cremoniana intera. Per $q \geq 2$ ed $r \geq 3$ consideriamo la corrispondenza cremoniana T di equazioni:

$$(T) \begin{cases} x'_i = f(x) x_i \\ x'_r = f(x) x_r + g(x) \end{cases}, \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_i = f(x') x'_i \\ x_j = f(x') x'_j - g(x') \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, r-1,$$

con $f(x)$ forma irriducibile di grado q nelle sole variabili $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$ e $g(x)$ forma nelle sole variabili $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$ di grado $q+1$ e non divisibile per $f(x)$. La jacobiana di T è $J(x) = (q+1)f^{r+1}(x)$ e quindi $\mu(T) = q$. Per $r=2$ e $q \geq 2$, consideriamo la corrispondenza $T = SUS^{-1}$ dove U è l'omografia di equazioni:

$$(U) \quad x'_0 = x_0, \quad x'_1 = x_1 + x_2, \quad x'_2 = x_2,$$

(8) Le equazioni della inversa T_ρ^{-1} sono:

$$\begin{aligned} \text{per } \rho \geq r, \quad & \begin{cases} x_0 = x'_{r-1} x'_0 - x'^2_{r-1} \\ x_i = x'_{r-1} x'_i \\ x_j = x'_r x'_j \end{cases} & \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \rho-1, \\ j = \rho, \rho+1, \dots, r, \end{matrix} \\ \text{per } \rho = r+1, \quad & \begin{cases} x_0 = x'_r x'_0 - x'^2_{r-1} \\ x_i = x'_r x'_i \end{cases} & i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

ed S è la corrispondenza cremoniana di equazioni:

$$(S) \begin{cases} x'_0 = x_0 (x_0^{q-1} x_2 - x_1^q) \\ x'_1 = x_1 (x_0^{q-1} x_2 - x_1^q) \\ x'_2 = x_0^{q+1} \end{cases}, \quad (S^{-1}) \begin{cases} x_0 = x_0'^q x'_2 \\ x_1 = x_0'^{q-1} x'_1 x'_2 \\ x_2 = x_1'^q x'_2 + x_0'^{q+1} \end{cases}$$

La jacobiana della $T = SUS^{-1}$ è $J(x) = (q^2 + 1)(x_0^{q-1} x_2 - x_1^q)^{3q}$; si ha quindi $\mu(T) = q$.

5. a) Se $\rho (\geq 1)$ è un divisore di $r + 1$, allora l'insieme delle corrispondenze cremoniane T di S_r per cui $\tau(T)$ è divisibile per ρ è un gruppo: $G_r^{(q)}$.

Anzitutto, il nostro insieme $G_r^{(q)}$ non è vuoto (n. 4, a). Inoltre, se $G_r^{(q)}$ contiene una corrispondenza T , allora $G_r^{(q)}$ contiene anche l'inversa T^{-1} perché $\tau(T) = \tau(T^{-1})$ (n. 2, a). Infine se T e V sono due corrispondenze qualsiasi dell'insieme $G_r^{(q)}$, allora $\tau(T)$ e $\tau(V)$ sono divisibili per ρ e quindi (n. 3, a) $\tau(TV)$ è divisibile per ρ , cioè TV sta nell'insieme.

In modo del tutto analogo, tenendo presente i risultati dei nn. 4, b), 2, b), 3, b), si prova che:

b) Se q è un intero non negativo qualunque, allora l'insieme delle corrispondenze cremoniane T di S_r per cui si ha $\mu(T) = sq$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) è un gruppo: $G_\mu^{(q)}$.

6. Fissiamo r ($r \geq 2$) e consideriamo il gruppo G di tutte le corrispondenze cremoniane di S_r ed i suoi sottogruppi $G_r^{(q)}$, corrispondenti ai singoli divisori ρ di $r + 1$.

Al divisore $\rho = 1$ corrisponde il gruppo G stesso, cioè si ha $G_r^{(1)} = G$.

Al divisore $\rho = r + 1$ corrisponde il sottogruppo $G_r^{(r+1)}$ il quale contiene tutte le omografie, tutte le corrispondenze cremoniane intere di S_r , ed anche tutte le corrispondenze cremoniane di S_r che hanno la jacobiana composta con un cono irriducibile C contato $r + 1$ volte, cono C che si può scegliere in modo del tutto arbitrario ⁽⁹⁾.

Le sole corrispondenze quadratiche di tipo $(2, m)$ del gruppo $G_r^{(r+1)}$ sono quelle che hanno la jacobiana composta con un iperpiano $(r + 1)$ -uplo, cioè sono le corrispondenze quadratiche prodotto di una corrispondenza quadratica intera per una omografia ⁽¹⁰⁾. Ne segue:

Una corrispondenza quadratica di tipo $(2, m)$, con $m \geq 2$, di S_r non si può ottenere come prodotto di un numero finito di corrispondenze cremoniane intere ⁽¹¹⁾ di qualunque ordine, con la sola eccezione delle quadratiche prodotto di una quadratica intera per una omografia.

(9) C. MAMMANA, *Gruppi di corrispondenze cremoniane di S_2 definiti da proprietà delle jacobiane*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXXV, fasc. 1-2 (1963), n. 3.

(10) C. MAMMANA, *Corrispondenze cremoniane e loro jacobiane*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXXIII, fasc. 5 (1962), nn. 4, 5.

(11) Si tenga presente che le omografie fra spazi proiettivi (distinti o sovrapposti) sono corrispondenze cremoniane intere. Cfr. C. MAMMANA, loc. cit. in ⁽¹⁰⁾, n. 2.

Per esempio, nel piano ($r = 2$) una qualsiasi corrispondenza quadratica non si può ottenere come prodotto di un numero finito di corrispondenze cremoniane intere (di qualunque ordine), eccettuate soltanto le corrispondenze quadratiche con i tre punti fondamentali infinitamente vicini.

7. Se $r + 1$ è un numero primo, allora non si hanno altri sottogruppi $G_\tau^{(q)}$ oltre i due già considerati, e cioè $G_\tau^{(r+1)}$ e $G_\tau^{(1)} = G$.

Supponiamo che sia $r + 1 = p^a$, con p primo ed $a \geq 2$.

In questo caso, in corrispondenza ai divisori $\rho = 1, p, p^2, \dots, p^a$ si hanno $a + 1$ sottogruppi che formano una catena discendente *in senso stretto*:

$$G_\tau^{(1)} = G \supset G_\tau^{(p)} \supset G_\tau^{(p^2)} \supset \dots \supset G_\tau^{(p^{a-1})} \supset G_\tau^{(r+1)}.$$

Ciò in quanto esistono corrispondenze quadratiche che stanno in uno qualunque di questi sottogruppi distinto dall'ultimo, ma non stanno nel successivo (n. 4, a).

Per esempio, in S_3 ($r = 3$) si ha la catena:

$$G \supset G_\tau^{(2)} \supset G_\tau^{(4)}.$$

Le uniche corrispondenze quadratiche di tipo $(2, 2)$ di S_3 per cui si ha $\tau(T) = 2$ sono quelle definite dai sistemi di coniche tangenti ad un piano dato lungo una retta data, e passanti per un punto dato (fuori del piano). Sempre in S_3 , un altro caso in cui si ha $\tau(T) = 2$ è quello delle corrispondenze cremoniane di tipo $(3, 3)$ definite dai sistemi di superficie cubiche passanti per i sei spigoli di un tetraedro.

8. Consideriamo infine il caso generale di $r + 1$ qualunque.

Se ρ_1 e ρ_2 sono due divisori di $r + 1$, si ha $G_\tau^{(q_1)} \supseteq G_\tau^{(q_2)}$ quando - e soltanto quando - ρ_2 è divisibile per ρ_1 . Pertanto i sottogruppi $G_\tau^{(q)}$ formano un reticolo finito R_τ , isomorfo al reticolo dei divisori di $r + 1$ ⁽¹²⁾, e quindi distributivo.

Nel reticolo R_τ si ha:

$$G_\tau^{(q_1)} \cap G_\tau^{(q_2)} = G_\tau^{(q')}, \quad G_\tau^{(q_1)} \cup G_\tau^{(q_2)} = G_\tau^{(q'')}$$

con $\rho' = \text{m.c.m.} (\rho_1, \rho_2), \quad \rho'' = \text{M.C.D.} (\rho_1, \rho_2).$

9. Considerazioni analoghe si possono fare per i sottogruppi $G_\mu^{(q)}$ ($q = 0, 1, 2, \dots$).

Se q_1 e q_2 sono due interi non negativi, si ha $G_\mu^{(q_1)} \supseteq G_\mu^{(q_2)}$ quando è $q_2 = 0$ oppure q_2 è divisibile per q_1 . Pertanto i sottogruppi $G_\mu^{(q)}$ ($q = 0, 1, 2, \dots$)

(12) Con $a \supseteq b$ quando b è divisibile per a .

formano un reticolo R_μ , isomorfo al reticolo dei numeri naturali ⁽¹³⁾ completato con l'elemento minimo.

Il reticolo R_μ è quindi distributivo ed in esso si ha (per $q_1, q_2 \neq 0$):

$$G_\mu^{(q_1)} \cap G_\mu^{(q_2)} = G_\mu^{(q')} \quad , \quad G_\mu^{(q_1)} \cup G_\mu^{(q_2)} = G_\mu^{(q'')} ,$$

con $q' = \text{m.c.m.} (q_1, q_2) \quad , \quad q'' = \text{M.C.D.} (q_1, q_2) ,$

ed inoltre:

$$G_\mu^{(q)} \cap G_\mu^{(0)} = G_\mu^{(0)} \quad , \quad G_\mu^{(q)} \cup G_\mu^{(0)} = G_\mu^{(q)} \quad (q = 0, 1, 2, \dots) .$$

Il gruppo $G_\mu^{(1)}$ coincide con quello G di tutte le corrispondenze cremoniane di S_r , ed è il massimo di R_μ ; il gruppo $G_\mu^{(0)}$ è quello di tutte le omografie di S_r , ed è il minimo di R_μ .

(13) Con $a \supseteq b$ quando b è divisibile per a .