ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE TALLINI

Sulle connessioni di Weyl localmente metriche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.3, p. 322–328.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_3_322_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sulle connessioni di Weyl localmente metriche* (*).
Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (***) dal Socio B. SEGRE.

1. Denoteremo nel seguito con V_n una varietà differenziabile, connessa, di dimensione n e di classe C^∞ ([4] p. 108, [1] p. 1). Supporremo, per semplicità, gli enti che considereremo in V_n sempre di classe C^∞ ; inoltre le metriche definite su V_n , o su suoi aperti saranno (salvo avviso contrario) definite positive e le connessioni simmetriche.

Una connessione Γ di V_n , [3], la diremo *localmente metrica*, se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ di V_n e per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, una metrica γ^α definite in U_α , tale che in U_α la connessione metrica di γ^α coincida con Γ . Chiameremo tensore di transizione di una tale metrica locale, il tensore definito in $U_\alpha \cap U_\beta$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$), dato da $\overset{\alpha}{k}_j^i = \overset{\alpha}{\gamma}^{is} \overset{\beta}{\gamma}_{sj}$ (ove $\overset{\alpha}{\gamma}$ è il tensore reciproco di γ^α). $\overset{\alpha}{k}_j^i$ risulta manifestamente parallelo rispetto a Γ .

Una connessione Γ di V_n , dicesi di *Weyl*, [2] p. 81, se essa può rappresentarsi, almeno in un modo, nella forma:

$$(1) \quad \Gamma_{jh}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\} + \delta_j^i \psi_h + \delta_h^i \psi_j - g_{jh} \psi^i,$$

ove g_{jh} , $\left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}$, ψ_h sono rispettivamente: un tensore metrico, i simboli di Christoffel di tale tensore, un vettore covariante di V_n e si è posto $\psi^i = g^{is} \psi_s$.

Il presente lavoro è dedicato allo studio delle connessioni di Weyl localmente metriche. Precisamente, dopo aver esposto nel n. 2 alcune nozioni generali sulle metriche locali di una V_n , nel n. 3, fatti alcuni richiami sulle connessioni di Weyl, ci occuperemo di quelle localmente metriche e proveremo il seguente:

TEOREMA. — *Sia Γ una connessione di Weyl di V_n , W l'insieme delle connessioni Γ localmente metriche, H_1 lo spazio di coomologia delle 1-forme di V_n . Se e soltanto se, Γ è localmente metrica, in una qualsiasi rappresentazione (1) di Γ , la 1-forma $\psi = \psi_h dx^h$, risulta chiusa e variabile in una stessa classe di coomologia al variare di tale rappresentazione. Se si fa corrispondere a Γ tale classe di coomologia, si ottiene una applicazione $f: W \rightarrow H_1$, la quale risulta surgettiva (ma non biettiva). La classe di coomologia nulla, o, proviene, mediante f , da tutte e sole le $\Gamma \in W$ globalmente metriche. Per ogni $\Gamma \in W$ esiste una metrica locale di Γ , con tensore di transizione proporzionale al tensore*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 17.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1964.

di Kronecker δ . Se Γ non ammette una metrica globale, non esistono su V_n campi di tensori, non identicamente nulli, di ranghi diversi, paralleli rispetto a Γ .

Nel n. 4 esamineremo le connessioni localmente metriche di una V_2 e proveremo che, se il tensore di Ricci della connessione non è mai nullo, essa risulta di Weyl (cfr. Prop. VI). Daremo inoltre una proprietà caratteristica delle connessioni localmente metriche, con tensore di Ricci mai nullo (cfr. Prop. VII). Una analoga caratterizzazione sarà data nel n. 5, per le connessioni di una V_n ($n \geq 3$) che ammettono una metrica globale di Einstein, con curvatura scalare non nulla (cfr. Prop. VIII).

2. Diremo che su una varietà differenziabile V_n è data una *metrica locale*, se è dato un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ di V_n e, per ogni $\alpha \in \mathfrak{A}$, una metrica γ definita in U_α . Se $\{U_\alpha, \gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ è una metrica locale di V_n , per ogni $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, rimane determinato in $U_\alpha \cap U_\beta$ il tensore, con un indice di covarianza e uno di contravarianza, $\overset{\alpha}{k} = \overset{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha}{\gamma}$ (ove $\overset{\alpha}{\gamma}$ denota il tensore reciproco di $\overset{\alpha}{\gamma}$) le cui componenti, in coordinate locali, sono $\overset{\alpha}{k}_j^i = \overset{\alpha}{\gamma}^{is} \gamma_{sj}$. Tale tensore sarà chiamato *tensore di transizione* della metrica locale $\{U_\alpha, \gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Per esso evidentemente si ha:

$$(1) \quad \overset{\alpha}{k} \overset{\beta}{k} = \overset{\alpha}{k} \quad \left(\text{in coordinate locali: } \overset{\alpha}{k}_j^i \overset{\beta}{k}_j^s = \overset{\alpha}{k}_j^i \right), \text{ in } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma (\neq \emptyset).$$

$$(2) \quad \overset{\alpha}{\gamma} = \overset{\beta}{k} \overset{\alpha}{\gamma} \quad \left(\text{in coordinate locali: } \gamma_{ij} = \overset{\alpha}{k}_i^s \gamma_{sj} \right), \text{ in } U_\alpha \cap U_\beta (\neq \emptyset).$$

Dalle (1), (2) si ottiene $\det \left\| \overset{\alpha}{k}_j^i \right\| \neq 0$, $\overset{\alpha}{k} = \delta$ (δ tensore di Kronecker), $\overset{\alpha}{k} \overset{\beta}{k} = \delta$. Denoteremo poi con ∇_α l'operatore di derivazione covariante, relativo a $\overset{\alpha}{\gamma}$, in U_α .

Diremo che la metrica locale $\{U_\alpha, \gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ è *dotata di una connessione globale*, o che è *una metrica locale a connessione*, se esiste una connessione Γ , definita globalmente in V_n , tale che, per ogni $\alpha \in \mathfrak{A}$, Γ coincida con la connessione della metrica γ , in U_α . Proviamo che:

PROP. I. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché la metrica locale $\{U_\alpha, \gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ sia dotata di una connessione globale Γ è che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$*

con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\overset{\alpha}{k}$ sia parallelo, rispetto a $\overset{\alpha}{\gamma}$, in $U_\alpha \cap U_\beta$.

La condizione necessaria essendo evidente, dimostriamone la sufficienza.

Se, per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, è in $U_\alpha \cap U_\beta$, $\nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} k = 0$, si ha:
 $\nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} k = \nabla_{\alpha}^{\alpha} \gamma \cdot \gamma + \gamma \nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} \gamma = \gamma \nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} \gamma = 0$, da cui $\nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} \gamma = 0$. Dunque in $U_\alpha \cap U_\beta$, è
 $\nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} \gamma = 0$, cioè $\Gamma = \Gamma_{\alpha}^{\alpha}$ (Γ denotando la connessione relativa a γ in U_α). Su
 V_n resta così definita globalmente una connessione $\Gamma = \{\Gamma_{\alpha}^{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, godente
della proprietà voluta.

In seguito ci occuperemo delle metriche locali per cui il tensore di transizione risulti proporzionale al tensore δ di Kronecker. Per esse sussiste la seguente:

PROP. II. - Sia $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una metrica locale di V_n con tensore di transizione $\nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} k = c \delta_{\alpha\beta}^{\alpha}$ (c scalare positivo definito in $U_\alpha \cap U_\beta$). Se su V_n esiste un campo globale di tensori (non identicamente nullo) t , con i ranghi di covarianza e contravarianza diversi, tale che $\nabla t = 0$, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$; la metrica locale $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è dotata di una connessione globale Γ , ed inoltre Γ risulta globalmente metrica.

Non è restrittivo supporre gli aperti U_α semplicemente connessi (per esempio sferoidi di un prefissato atlante). Se $t^{i_1 \dots i_r}_{h_1 \dots h_s}$ sono le componenti di t , sarà $r \neq s$, supporremo allora $r > s$ (in modo analogo si tratta l'altro caso). Posto in U_α ($\forall \alpha \in \mathcal{A}$) $\varphi = N(t) = \gamma_{i_1 j_1}^{\alpha} \dots \gamma_{i_r j_r}^{\alpha} \gamma^{h_1 k_1} \dots \gamma^{h_s k_s} t^{i_1 \dots i_r}_{h_1 \dots h_s} t^{j_1 \dots j_r}_{k_1 \dots k_s}$, si ha $\nabla_{\alpha h}^{\alpha} \varphi = \partial_{\alpha h}^{\alpha} \varphi = 0$, onde $\varphi = \text{cost.} \geq 0$ in U_α .

Il tensore t non è mai nullo su V_n . Infatti l'insieme A dei punti di V_n in cui t si annulla è un aperto (in quanto se in P è $t = 0$, detto U_α un aperto di $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ contenente P , risulta $\varphi(P) = 0$, cioè $\varphi = 0$ in U_α , onde t identicamente nullo in U_α), d'altra parte il complementare di A è anche esso un aperto (t essendo continuo), ma la V_n è supposta connessa, onde (non potendo $A = V_n$) è $A = \emptyset$. Risulta dunque $\varphi > 0$, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$. Porremo $\varphi = (\varphi)_{\alpha}^{-1}$.

In $U_\alpha \cap U_\beta$ ($\neq \emptyset$) risulta $\varphi = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{r-s} \varphi_{\alpha}$ e cioè: $c = \left(\frac{\alpha}{\beta} \varphi\right)^{\frac{1}{r-s}}$. Dunque le $c_{\alpha\beta}^{\alpha}$ sono costanti, cioè il tensore $\nabla_{\alpha\beta}^{\alpha} k = c \delta_{\alpha\beta}^{\alpha}$ è parallelo, rispetto a γ , in $U_\alpha \cap U_\beta$. Per la Prop. I, allora $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è dotata di una connessione globale Γ . Denotato con ∇ l'operatore di derivazione covariante rispetto a Γ , sarà $\nabla_{\alpha}^{\alpha} \varphi = \nabla_{\alpha}^{\alpha} \varphi$, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$; e quindi, posto $g_{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^{\frac{1}{r-s}} \gamma_{\alpha}$, è $\nabla_{\alpha}^{\alpha} g = 0$. Cioè Γ ammette come metrica locale, oltre alla $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, anche la $\{U_\alpha, g\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

In ogni $U_\alpha \cap U_\beta$ ($\neq \emptyset$), risulta $g_{\beta} = \left(\frac{\beta}{\varphi}\right)^{\frac{1}{r-s}} \gamma_{\beta} = \left(\frac{\beta}{\varphi}\right)^{\frac{1}{r-s}} c_{\beta\alpha}^{\alpha} \gamma_{\alpha}$, e quindi, essendo $\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^{\frac{1}{r-s}} = \left(\frac{\beta}{\varphi}\right)^{\frac{1}{r-s}} c_{\beta\alpha}^{\alpha}$, $g_{\beta} = g_{\alpha}$. In V_n resta così definita globalmente la metrica $g = \{U_\alpha, g\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, che ammette come connessione Γ .

Dalla proposizione ora provata segue che:

PROP. III. — *Se Γ è una connessione di V_n localmente, ma non globalmente, metrica, e relativa ad una metrica locale con tensore di transizione proporzionale a δ , su V_n ogni campo di tensori parallelo, con i ranghi di covarianza e contravarianza diversi, risulta identicamente nullo.*

Nel numero successivo mostreremo, tra l'altro, che, se lo spazio di coomologia unidimensionale di V_n non si riduce allo zero, esistono connessioni Γ , del tipo indicato nella Prop. III.

3. Sia Γ una connessione di Weyl di V_n (cfr. n. 1). La rappresentazione (1) n. 1 di Γ non è unica: per esempio, posto $\bar{g}_{ij} = e^{2\theta} g_{ij}$, $\bar{\psi}_h = \psi_h - \partial_h \theta$, ove θ è uno scalare di V_n , si prova facilmente (cfr. [2] p. 81) che Γ ammette una rappresentazione analoga alla (1), rispetto ai nuovi tensori $\bar{g}_{ij}$ e $\bar{\psi}_h$ (tali ultime rappresentazioni non sono però le uniche). Si osservi infine che, sfruttando la partizione dell'unità di V_n , [1] p. 3, [4] p. 328, si può sempre dotare V_n di una connessione di Weyl.

Denotato con ∇ l'operatore di derivazione covariante fatta rispetto a Γ si prova immediatamente che:

$$(2) \quad \nabla_h g_{ij} + 2\psi_h g_{ij} = 0.$$

Viceversa se Γ è una connessione di V_n , tale che, per un fissato campo di vettori ψ_h e per un fissato tensore metrico g_{ij} , vale la (2), allora sussiste la (1) (cfr. [2] p. 81), cioè Γ è di Weyl. Osserviamo inoltre che dalla (2) segue la:

$$(3) \quad g_{lm} \nabla_h g_{ij} = g_{ij} \nabla_h g_{lm}.$$

Viceversa se Γ è una connessione di V_n tale che, per un fissato tensore metrico g_{ij} , sussiste la (3); posto $2n\psi_h = -g^{ij} \nabla_h g_{ij}$, dalla (3) segue la (2), cioè Γ è una connessione di Weyl. Dunque una tale connessione si può definire mediante la (1), o la (2), o la (3).

Denotato con $\Gamma_{j\bar{h}k}^i$ il tensore di curvatura di Γ , dalla (1) e dalla (2) seguono immediatamente le:

$$(4) \quad \Gamma_{i\bar{h}k}^i = n(\nabla_k \psi_h - \nabla_h \psi_k)$$

$$(5) \quad \nabla_{hk} g_{ij} - \nabla_{kh} g_{ij} = 2g_{ij}(\nabla_h \psi_k - \nabla_k \psi_h).$$

Se la connessione di Weyl Γ è localmente metrica, dovrà essere $\Gamma_{i\bar{h}k}^i = 0$ (in quanto il tensore di curvatura di Γ coincide con quello della metrica locale) e quindi, per le (4) e (5), ψ_h è irrotazionale e $\nabla_{hk} g_{ij} - \nabla_{kh} g_{ij} = 0$. Viceversa se $\Gamma_{i\bar{h}k}^i = 0$, oppure $\nabla_{hk} g_{ij} - \nabla_{kh} g_{ij} = 0$, per le (4) e (5) ψ_h è irrotazionale. Fissato un ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ di V_n , ove gli U_α sono aperti semplicemente connessi di V_n , per ogni U_α esiste allora uno scalare θ_α ivi definito, tale che in U_α $\nabla_h \theta_\alpha = \psi_h$. Posto in U_α $\gamma_{ij} = e^{2\theta_\alpha} g_{ij}$, risulta per la (2), $\nabla_h \gamma_{ij} = 0$, cioè in U_α la connessione della metrica γ_{ij} coincide con Γ . Dunque Γ è localmente

metrica, ammettendo come metrica locale $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Il tensore di transizione di $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ risulta $k_{\beta}^{\alpha} = \gamma^{\alpha s} \gamma_{s\beta} = e^{2(\theta\beta - \theta^{\alpha})} \delta_j^i$. Si osservi infine che se ψ_h è il gradiente di uno scalare θ definito globalmente su V_n , Γ risulta globalmente metrica (basta porre $\gamma_{ij} = e^{2\theta} g_{ij}$ ed osservare che $\nabla_h \gamma_{ij} = 0$). Ne segue che:

PROP. IV. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione di Weyl Γ risulti localmente metrica è che $\Gamma_{ihk}^i = 0$, oppure che $\nabla_{hk} g_{ij} - \nabla_{kh} g_{ij} = 0$, oppure che ψ_h sia irrotazionale ([2] p. 81). Soddisfatte una di tali condizioni, Γ ammette una metrica locale con tensore di transizione proporzionale a δ . Se poi ψ_h è un gradiente, Γ è globalmente metrica.*

Sia Γ una qualsiasi connessione di Weyl, e siano (g_{ij}, ψ_h) , $(\tilde{g}_{ij}, \tilde{\psi}_h)$ i tensori relativi a due sue rappresentazioni del tipo (I). Posto $\varphi = g_{ij} \tilde{g}^{ij}$, si ha evidentemente $\varphi > 0$; inoltre dalla (2) e dalla $\nabla_h \tilde{g}^{ij} = 2 \tilde{\psi}_h \tilde{g}^{ij}$ (che si desume dalla (2) relativa alla rappresentazione $(\tilde{g}_{ij}, \tilde{\psi}_h)$ di Γ) risulta $\partial_h \varphi = 2 \varphi (\tilde{\psi}_h - \psi_h)$ e quindi $\tilde{\psi}_h = \psi_h + \partial_h \log \sqrt{\varphi}$. Se Γ è globalmente metrica, detta g_{ij} una sua metrica, Γ ammette una rappresentazione (I) con $\psi_h = 0$. In ogni altra rappresentazione (I) allora, per quanto precede, ψ_h risulta un gradiente. Si ha quindi la:

PROP. V. - *Se (g_{ij}, ψ_h) e $(\tilde{g}_{ij}, \tilde{\psi}_h)$ sono i tensori di due rappresentazioni di una connessione Γ di Weyl, risulta $\tilde{\psi}_h = \psi_h + \partial_h \log \sqrt{\varphi}$, ove $\varphi = g_{ij} \tilde{g}^{ij} (> 0)$. Dunque al variare comunque della rappresentazione (I) di una fissata connessione Γ di Weyl, localmente metrica, la 1-forma chiusa $\psi = \psi_h dx^h$ varia in una stessa classe di coomologia. Γ è globalmente metrica se, e soltanto se, in una qualsiasi rappresentazione (I), ψ_h risulta un gradiente.*

Una connessione di Weyl localmente metrica determina quindi una classe di coomologia 1-dimensionale. La corrispondenza che così si ottiene è su, ma non biunivoca. Infatti, fissato un tensore metrico g_{ij} di V_n (e ciò è sempre possibile in forza del teorema di Whitney, [5]) al variare comunque di ψ_h si ottengono, mediante la (I), connessioni di Weyl tutte tra loro distinte (in forza della (2)), onde l'asserto. Osserviamo infine che, se Γ è una qualsiasi connessione di Weyl (I), non globalmente metrica, su V_n non possono esistere campi di tensori paralleli rispetto a Γ , di ranghi diversi, non identicamente nulli; in quanto, se così fosse, denotato con $\varphi (> 0)$ la norma rispetto a g_{ij} del tensore t (di ranghi r, s , con $r \neq s$) si avrebbe dalla (2) e dalla $\nabla_h g^{ij} = 2 g^{ij} \psi_h$ (che si desume dalla (2)), $\partial_h \varphi = \nabla_h \varphi = 2(s-r)\varphi \psi_h$, cioè ψ_h sarebbe un gradiente, onde Γ sarebbe metrica.

Da quanto ora provato e dalle proposizioni IV, V segue il teorema del n. 1.

4. In questo numero ci occuperemo delle connessioni Γ localmente metriche di una V_2 , con tensore di Ricci R_{ij} mai nullo.

Si consideri una qualsiasi metrica locale di Γ , $\{U_\alpha, \gamma\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, ove gli aperti U_α ($\forall \alpha \in \mathcal{A}$) possono suppersi semplicemente connessi. Dovrà aversi - com'è

noto - in $U_\alpha (\forall \alpha \in \mathfrak{A})$, $R_{ij} = k^\alpha \gamma_{ij}$, ove k^α è la curvatura gaussiana di γ_α . Risultando il tensore R_{ij} mai nullo, dovrà essere $k^\alpha \neq 0$, $\det \|R_{ij}\| \neq 0$. Posto allora $k_\alpha = (k^\alpha)^{-1}$, in $U_\alpha \cap U_\beta (\neq \emptyset)$ si ha $\gamma_{ij} = k_\alpha R_{ij}$, $\gamma_{ij} = k_\beta R_{ij}$, onde $\gamma_{ij} = k_\beta k^\alpha \gamma_{ij}$, cioè il tensore di transizione della metrica è $k_\beta^\alpha = k_\beta k^\alpha \delta_j^i$. Inoltre $k_\beta k^\alpha > 0$ (in quanto γ_α e γ_β sono definite positive), cioè k^α e k^β hanno lo stesso segno ($\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$), dunque il tensore $R_{ij} (= k^\alpha \gamma_{ij})$ è definito ovunque positivo oppure ovunque negativo su V_2 .

Si consideri in V_2 il vettore $\psi_h = -\frac{1}{4} R^{ij} \nabla_h R_{ij}$ (R^{ij} tensore reciproco di R_{ij}). In $U_\alpha (\forall \alpha \in \mathfrak{A})$ si ha (derivando covariantivamente $\gamma_{ij} = k_\alpha R_{ij}$) $\partial_h \log |k_\alpha| R_{ij} + \nabla_h R_{ij} = 0$, da cui $\partial_h \log |k_\alpha| = 2\psi_h$ e quindi $\nabla_h R_{ij} + 2\psi_h R_{ij} = 0$. Posto $g_{ij} = \varepsilon R_{ij}$ (ove è $\varepsilon = 1$ se R_{ij} è definito positivo su V_2 , $\varepsilon = -1$ nell'altro caso), il tensore g_{ij} risulta definito positivo ed inoltre $\nabla_h g_{ij} + 2\psi_h g_{ij} = 0$, ossia Γ è di Weyl. Si ottiene così la seguente

PROP. VI. - *In una V_2 , una qualsiasi connessione Γ localmente metrica, con tensore di Ricci mai nullo, è una connessione di Weyl. Inoltre il tensore di transizione di una arbitraria metrica locale di Γ è proporzionale a δ .*

Per una qualsiasi connessione Γ di V_2 con tensore di Ricci, R_{ij} , simmetrico si ha:

$$(6) \quad \nabla_{hk} R_{ij} - \nabla_{kh} R_{ij} = 0.$$

Infatti, per l'identità di Ricci, si ha: $\nabla_{12} R_{ij} - \nabla_{21} R_{ij} = -R_{sj} R_{i12}^s - R_{is} R_{j12}^s$ (ove R_{jkh}^i denota il tensore di curvatura di Γ); da cui, risultando $R_{ij} = R_{ji}$ e $R_{i1} = R_{i12}^2 = -R_{i21}^2$, $R_{i2} = R_{i21}^1 = -R_{i12}^1$, si ha $\nabla_{12} R_{ij} - \nabla_{21} R_{ij} = 0$ e quindi la (6).

Da quanto detto nel secondo capoverso di questo numero, dall'osservazione contenuta nel secondo capoverso del n. 3, dalla (6) e dalla Prop. IV del n. 3, si deduce facilmente la seguente caratterizzazione delle connessioni localmente metriche, con tensore di Ricci mai nullo, di una V_2 .

PROP. VII. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione Γ di V_2 , con tensore di Ricci R_{ij} mai nullo, sia localmente metrica è che il tensore R_{ij} sia simmetrico e definito ovunque positivo o negativo, ed inoltre si abbia*

$$(7) \quad R_{lm} \nabla_h R_{ij} = R_{ij} \nabla_h R_{lm}.$$

5. Proviamo infine la seguente proposizione che dà una caratterizzazione delle connessioni di una V_n ($n \geq 3$) che ammettono una metrica globale di Einstein, con curvatura scalare diversa da zero.

PROP. VIII. - *Se il tensore di Ricci R_{ij} (a priori non simmetrico) di una connessione Γ di V_n ($n \geq 3$) soddisfa alle:*

$$(8) \quad R_{(lm)} \nabla_h R_{(ij)} = R_{(ij)} \nabla_h R_{(lm)} \quad , \quad \nabla_{hk} R_{(ij)} = \nabla_{kh} R_{(ij)}, \quad \det \|R_{(ij)}\| \neq 0,$$

Γ risulta globalmente metrica, con metrica di Einstein (in generale non definita positiva) a curvatura scalare $\neq 0$. E viceversa.

Dalle (8), da quanto detto nel secondo capoverso del n. 3 e dalla Prop. IV del n. 3, segue che Γ è una connessione di Weyl localmente metrica, con metrica locale $\{U_\alpha, \gamma\}$ (ove gli aperti U_α sono semplicemente connessi) data da $\gamma_{ij} = k R_{(ij)}$ ($k \neq 0$), cfr. quarto capoverso n. 3. Il tensore di Ricci di γ ($\forall \alpha \in \mathcal{A}$) coincide con quello di Γ , cioè con R_{ij} ; onde $R_{ij} = R_{ji}$, $\gamma_{ij} = k R_{ij}$ ed inoltre (per il teorema di Schur) $k = \text{cost.}$ Dunque $\nabla_h \gamma_{ij} = k \nabla_h R_{ij} = 0$, cioè $\nabla_h R_{ij} = 0$, ne segue che Γ ammette come metrica globale R_{ij} , onde l'asserto (il viceversa essendo ovvio).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Paris, Hermann, 1960.
- [2] L. P. EISENHART, *Non-Riemannian geometry*, « American Math. soc. Colloquium Publications », vol. VIII, New York 1927.
- [3] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese ed., Roma 1955.
- [4] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II, Docet, Roma 1956.
- [5] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, « Ann. of Math. » (2), 37, 645-680 (1936).