Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ercole De Castro

Analisi matriciale della stabilità dei sistemi a retroazione. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.2, p. 153–161.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_2_153_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Scienze Fisiche. — *Analisi matriciale della stabilità dei sistemi a retroazione*. Nota II di ERCOLE DE CASTRO, presentata (*) dal Corrisp. G. EVANGELISTI.

Oggetto di questa seconda Nota è l'esemplificazione di un procedimento di verifica della stabilità dei sistemi a retroazione, di cui venne esposta la teoria nella Nota prima.

Un semplice esempio di sistema elettrico quadripolare è rappresentato dal circuito di cui la fig. 1 indica lo schema semplificato, privo cioè degli elementi necessari per l'alimentazione e la polarizzazione del transistore.

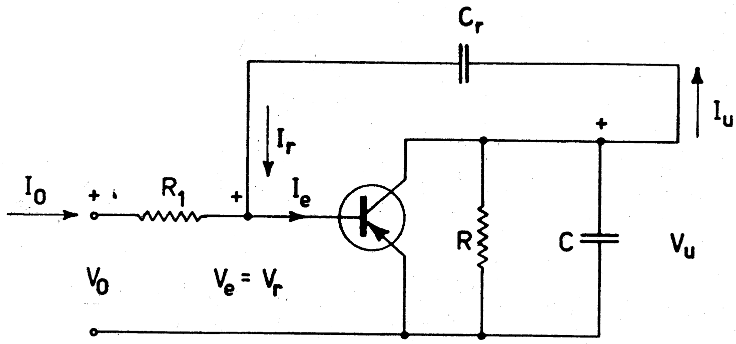

Fig. 1.

Sostituendo al transistore stesso il suo circuito equivalente a π ibrido, ci si riduce all'esame dello schema di fig. 2, in cui r_3 e C_3 conglobano R e C. Con le notazioni introdotte in precedenza, è chiaro che si dovrà assumere:

$$\vec{w}_0 = \begin{Vmatrix} V_0 \\ I_0 \end{Vmatrix} \quad , \quad \vec{w}_e = \begin{Vmatrix} V_e \\ I_e \end{Vmatrix} \quad , \quad \vec{w}_u = \begin{Vmatrix} V_u \\ I_u \end{Vmatrix} \quad , \quad \vec{w}_r = \begin{Vmatrix} V_r \\ I_r \end{Vmatrix} .$$

Inoltre conviene osservare che il circuito equivalente del transistore può essere scisso nei blocchi α' e α'' (fig. 3), di cui è assai facile calcolare le matrici miste. Per α', infatti, si hanno le equazioni:

$$V' = V_e - r_b I_e$$

$$I' = I_e$$

e quindi

$$\| \alpha' \| = \begin{Vmatrix} 1 & -r_b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Per quanto riguarda α'', è ben noto (ed assai facile verificare) che gli elementi della matrice ammettenza sono del tipo $Y_{ik} = G_{ik} + sC_{ik}$, con G_{ik}

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1964.

e C_{ik} costanti; a partire da questi è agevole determinare gli elementi della matrice mista:

$$\|\alpha''\| = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{Y_{11}}{Y_{12}} & \dfrac{1}{Y_{12}} \\ \dfrac{Y_{11}\,Y_{22}}{Y_{12}} - Y_{21} & -\dfrac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix} \right\|$$

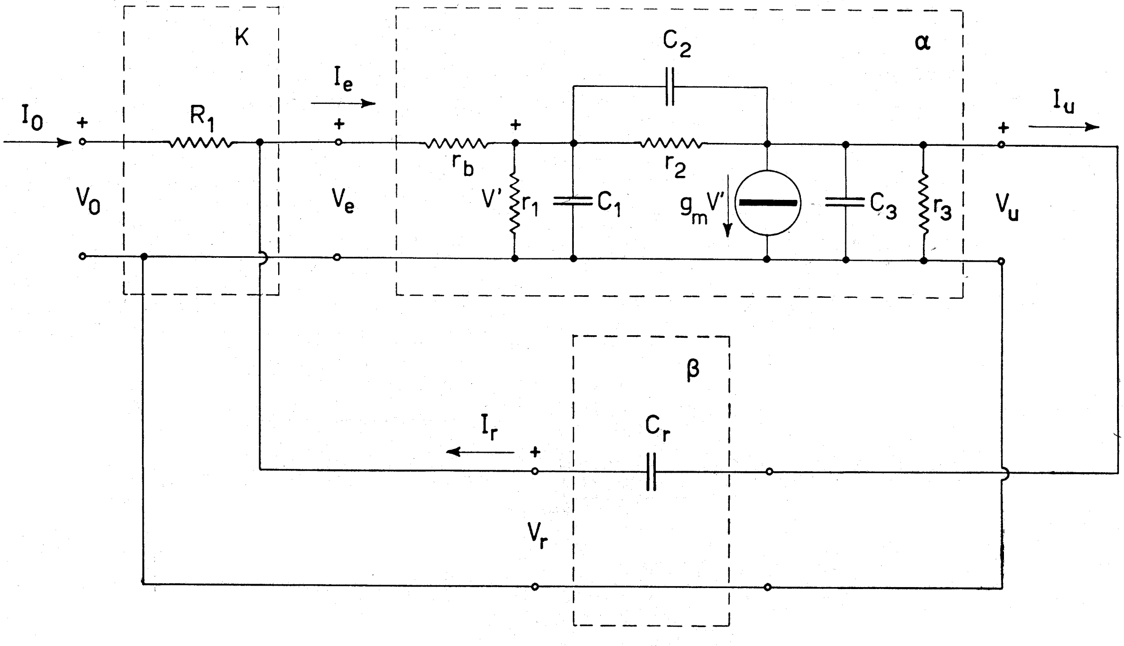

Fig. 2.

e così resta determinata la matrice

$$\|\alpha\| = \|\alpha''\|\,\|\alpha'\|.$$

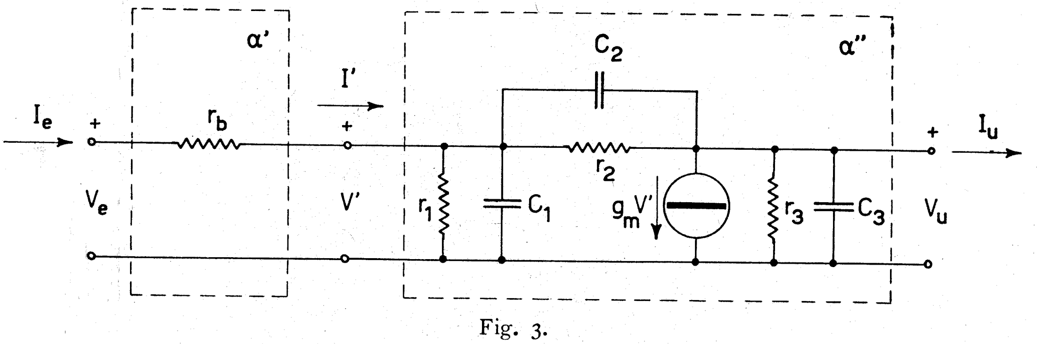

Fig. 3.

Infine per la rete di retroazione β e per l'esapolo K si hanno le equazioni:

$$V_r = V_u - \frac{1}{sC_r}\,I_u$$

$$I_r = I_u$$

$$V_e = V_r$$

$$I_e = \frac{V_0 - V_r}{R_1} + I_r$$

dalle quali si traggono le espressioni, assai semplici, delle matrici $\|\beta\|$, $\|\lambda\|$ e $\|\mu\|$:

$$\|\beta\| = \begin{Vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{sC_r} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|\lambda\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{R_1} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\|\mu\| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_1} & -1 \end{Vmatrix}.$$

In questo caso è agevole il calcolo esplicito del determinante $\Delta = \Delta(s)$ della matrice

$$\|1\| + \|\alpha\| \, \|\mu\| \, \|\beta\| ;$$

con

$$R = 1 \; k\Omega \quad , \qquad C = 500 \; pF$$

$$C_r = 10.000 \; pF \quad , \qquad R_1 = 1 \; k\Omega$$

e facendo uso di un transistore Philips OC 45, in condizioni normali di polarizzazione ($I_E = 1 \; mA$, $V_{CE} = -6$ V), si trova:

$$r_b = 100 \; \Omega$$

$$Y_{11} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} + s \; 10^{-9} \; S$$

$$Y_{12} = -0{,}5 \cdot 10^{-6} - s \; 10^{-11} \; S$$

$$Y_{21} = 40 \cdot 10^{-3} - s \; 10^{-11} \; S$$

$$Y_{22} = 10^{-3} + s \; 5{,}1 \cdot 10^{-11} \; S$$

e quindi:

$$\Delta(s) = -\frac{5{,}1 \cdot 10^{-16} s^4 + 1{,}83 \cdot 10^{-8} s^3 + 0{,}43 \, s^2 + 2{,}35 \cdot 10^4 s + 9{,}51 \cdot 10^7}{s \, (0{,}25 + 10^{-5} s + 10^{-10} s^2)} .$$

Gli zeri di Δ possono perciò essere determinati numericamente:

$$s_1 = -4{,}4 \cdot 10^3$$

$$s_2 = -5 \cdot 10^4$$

$$s_3 = -1{,}79 \cdot 10^7 + j \, 2{,}29 \cdot 10^7$$

$$s_4 = -1{,}79 \cdot 10^7 - j \, 2{,}29 \cdot 10^7$$

e la stabilità del circuito viene così dimostrata. Allo stesso risultato, come è ovvio, si sarebbe pervenuti analizzando l'andamento della curva $\Delta = \Delta(s)$, per $s = j\omega$ e ω variabile fra ∞ e $-\infty$; l'interpretazione di tale curva non presenta alcuna difficoltà ove si tenga conto che, per $s = 0$ e per $s = \infty$, Δ ha poli del primo ordine.

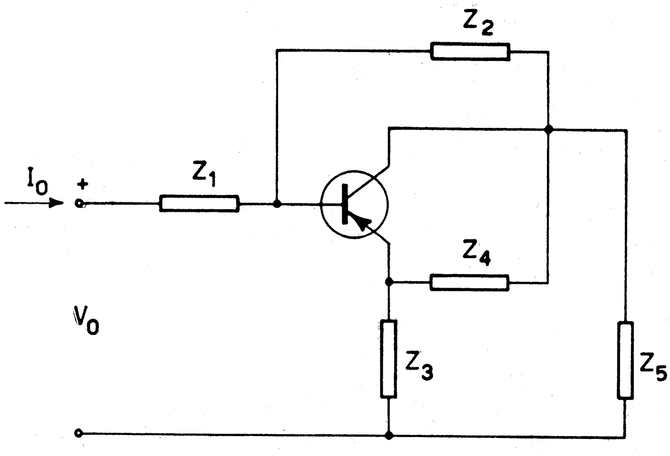

Fig. 4.

Come secondo esempio, verrà ora considerata una notevole categoria di circuiti elettronici comprendenti un transistore a cui sono applicati, come

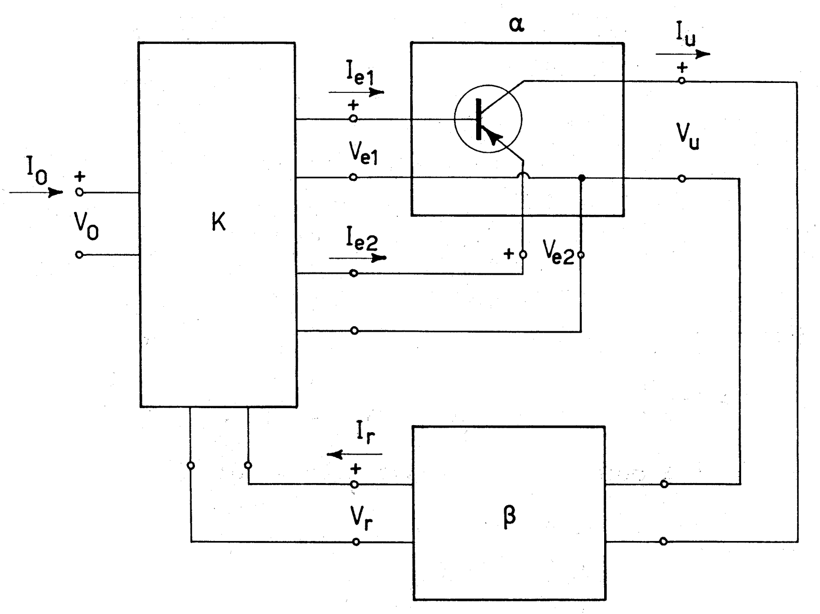

Fig. 5.

è indicato in fig. 4, segnali di retroazione sia sulla base che sull'emettitore. Con ovvia generalizzazione, si è indotti all'esame del sistema di fig. 5, dove il transistore è considerato a guisa di esapolo, mentre la rete di combinazione K risulta ottapolare [1].

Alcune cautele sono necessarie nella scelta delle variabili *di ingresso* e *di uscita*, mediante le quali la struttura di fig. 5 viene ricondotta allo schema generale di cui alla fig. 1 della Nota prima.

Occorre osservare intanto che il comportamento del blocco α (cioè dell'esapolo costituito dal transistore) è descritto da tre equazioni lineari che legano le sei grandezze V_{e1}, I_{e1}, V_{e2}, I_{e2}, V_u, I_u; è possibile pertanto esprimere

$$V_u\,,\ I_u\,,\ I_{e2}$$

in funzione di

$$V_{e1}\,,\ I_{e1}\,,\ V_{e2}\,,$$

ed è opportuno sottolineare che non si può omettere di considerare la relazione che lega I_{e2} a V_{e1}, I_{e1}, V_{e2}, poiché il vincolo che essa stabilisce è essenziale per definire il funzionamento di K (tale equazione, cioè, *fa sistema* con le altre). Appare dunque chiara la necessità di trattare I_{e2} non già come grandezza *uscente* da K [2], bensì *entrante*, attraverso il ciclo di retroazione, dato che il suo valore resta univocamente associato ai valori di V_{e1}, I_{e1}, V_{e2} dalle proprietà di α.

Conviene cioè considerare uscenti da K ed entranti in α le variabili

$$V_{e1}\,,\ I_{e1}\,,\ V_{e2}\,;$$

uscenti da α ed entranti in β le variabili

$$V_u\,,\ I_u\,,\ I_{e2}\,,$$

con l'ovvia intesa che β non modifica in alcun modo I_{e2}; uscenti da β ed entranti in K le variabili

$$V_r\,,\ I_r\,,\ I_{e2}\,.$$

Si giunge così allo schema di fig. 6, ove sono esplicitamente indicate le componenti dei vettori $\vec{w}_0$, $\vec{w}_e$, $\vec{w}_u$ e $\vec{w}_r$.

La matrice $\|\alpha\|$ è determinabile in modo ovvio a partire, ad esempio, dalla matrice di ammettenze a nove elementi del transistore. Per quanto riguarda β, indicandone con

$$V_r = \beta_{11}\ V_u + \beta_{12}\ I_u$$

$$I_r = \beta_{21}\ V_u + \beta_{22}\ I_u$$

(1) Il blocco β potrebbe pensarsi conglobato in K e ciò può essere necessario se, come talvolta accade, i circuiti di retroazione che fanno capo alla base ed all'emettitore non hanno alcuna parte in comune. La opportunità di tenere separati, almeno entro certi limiti, i diversi blocchi deriva dalla maggiore semplicità che ne risulta per le espressioni delle singole matrici.

(2) È ovvio che qui la locuzione *entrante* o *uscente* non ha nulla a che vedere con la convenzione prescelta per il senso positivo di I_{e2}.

le consuete equazioni quadripolari in forma mista ed aggiungendo ad esse l'identità banale $I_{e2} = I_{e2}$, si può scrivere:

$$V_r = \beta_{11} V_u + \beta_{12} I_u + 0 I_{e2}$$
$$I_r = \beta_{21} V_u + \beta_{22} I_u + 0 I_{e2}$$
$$I_{e2} = 0 V_u + 0 I_u + I_{e2}$$

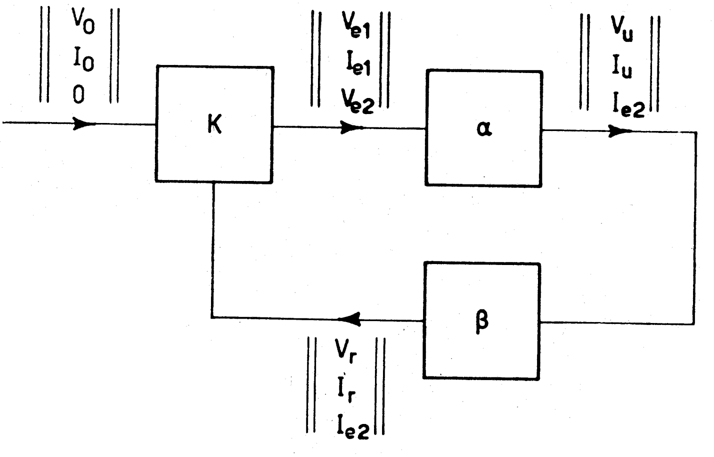

Fig. 6.

e pertanto risulta:

$$\|\beta\| = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Infine, per ciò che riguarda la rete di combinazione K, a quattro coppie di morsetti, si hanno quattro equazioni che legano le otto grandezze

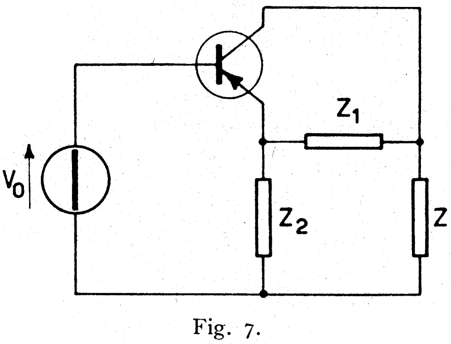

Fig. 7.

V_0, I_0, V_r, I_r, V_{e1}, I_{e1}, V_{e2}, I_{e2}. Si potrà quindi, almeno in generale, esprimere

$$V_{e1}, I_{e1}, V_{e2}, I_0$$

in funzione di

$$V_0, V_r, I_r, I_{e2}$$

ed avere perciò, in particolare, le relazioni (3):

$$V_{e1} = \lambda_{11} V_o - \mu_{11} V_r - \mu_{12} I_r - \mu_{13} I_{e2}$$
$$I_{e1} = \lambda_{21} V_o - \mu_{21} V_r - \mu_{22} I_r - \mu_{23} I_{e2}$$
$$V_{e2} = \lambda_{31} V_o - \mu_{31} V_r - \mu_{32} I_r - \mu_{33} I_{e2},$$

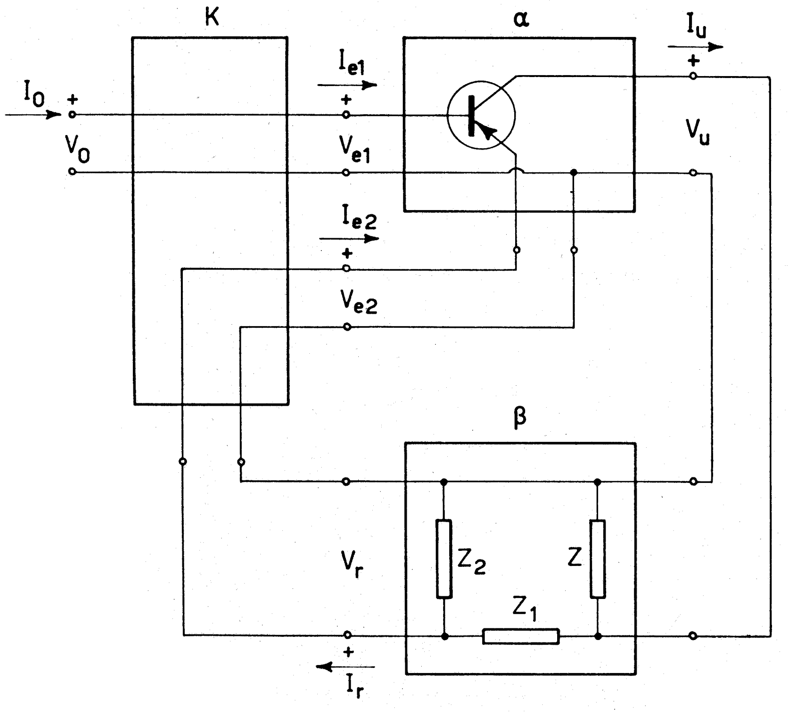

Fig. 8.

da cui si traggono le espressioni delle matrici

$$\|\lambda\| = \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\|\mu\| = \begin{Vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{Vmatrix}$$

Si completa così la determinazione degli elementi necessari per la valutazione del determinante associato alla matrice

$$\|1\| + \|\alpha\| \, \|\mu\| \, \|\beta\|$$

e per la ricerca quindi dei suoi eventuali zeri instabili.

(3) La relazione che determina I_o in funzione di V_o, V_r, I_r, I_{e2} non interviene nell'analisi della rimanente parte del circuito e da essa si può prescindere.

Il procedimento cade in difetto, naturalmente, se viene meno la definizione di una qualsiasi delle matrici considerate. Il che succede, ad esempio, ove si voglia ricondurre allo schema or ora esaminato il semplice circuito di fig. 7. Questo infatti, schematizzato come in fig. 8, darebbe luogo ad una rete di combinazione K costituita da due puri collegamenti; le ovvie equazioni

$$V_{e1} = V_o$$

$$I_{e1} = I_o$$

$$V_{e2} = V_r$$

$$I_{e2} = I_r$$

non consentirebbero evidentemente di esprimere V_{e1}, I_{e1}, V_{e2} e I_o in funzione di V_o, V_r, I_r e I_{e2} e perciò le matrici $\|\lambda\|$ e $\|\mu\|$ non potrebbero essere definite.

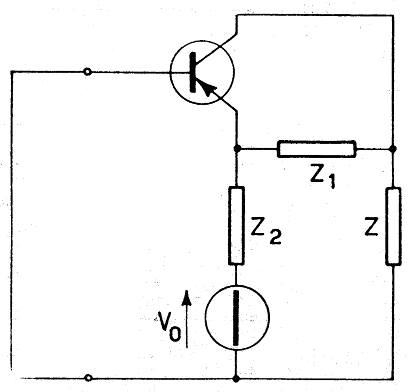

Fig. 9.

A tale inconveniente, tuttavia, si può facilmente ovviare scambiando il ruolo delle variabili I_{e1} e I_{e2}, cioè assumendo

$$\vec{w}_e = \begin{Vmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ I_{e2} \end{Vmatrix} , \quad \vec{w}_u = \begin{Vmatrix} V_u \\ I_u \\ I_{e1} \end{Vmatrix} ,$$

$$\vec{w}_r = \begin{Vmatrix} V_r \\ I_r \\ I_{e1} \end{Vmatrix} , \quad \vec{w}_o = \begin{Vmatrix} V_o \\ I_o \\ 0 \end{Vmatrix} ,$$

e procedendo per il resto in modo del tutto analogo a quanto sopra.

D'altra parte è opportuno rilevare che, agli effetti della verifica di stabilità, il generatore che alimenta il circuito di fig. 7 può essere posto in serie a Z_2, come in fig. 9. Tale generatore, infatti, si può pensare eroghi, con una tensione a carattere impulsivo, una certa quantità di energia provocando un transitorio la cui convergenza a zero o meno indica se il circuito è stabile o no; come venga iniettata questa energia, cioè da quale situazione iniziale parta detto transitorio, non ha importanza ai fini della verifica di stabilità.

Ciò premesso, è immediato riconoscere che il circuito di fig. 9 può essere ridisegnato come in fig. 10 e quindi studiato, mediante matrici di secondo anziché di terzo ordine, allo stesso modo del primo degli esempi considerati in questa Nota.

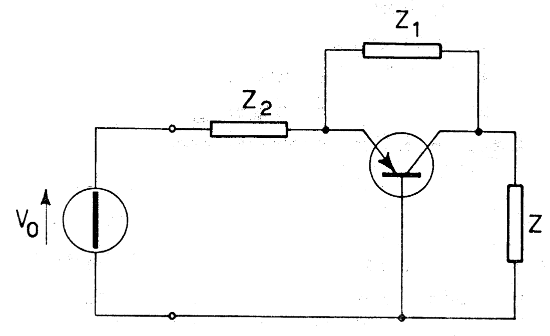

Fig. 10.

Gli esempi di applicazione della analisi matriciale della stabilità potrebbero, naturalmente, moltiplicarsi; fra l'altro, potrebbe essere di qualche interesse trattare problemi riguardanti reti che comprendano macchine elettriche a corrente continua, oppure sincrone, ove occorra tenere conto degli effetti che, in regime transitorio, la reazione di armatura produce sui circuiti di eccitazione. E così via.

Ciò esula, tuttavia, dai limiti di questa nota, che si propone semplicemente di esemplificare l'uso di un procedimento di analisi del tutto generale.