
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIANNANTONIO PEZZOLI

Sulla stabilità delle schiere di vortici. La doppia schiera di Bénard-Kàrmàn

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.2, p. 145–152.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_2_145_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Sulla stabilità delle schiere di vortici. La doppia schiera di Bénard-Kàrmàn.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

È noto che in un moto piano un corpo cilindrico ⁽¹⁾ che si muove in seno ad un fluido indefinito, normalmente alle generatrici, dà luogo ad una formazione di vortici, che per determinati valori del numero di Reynolds (relativo al corpo immerso) assumono un andamento regolare, dando origine ad una doppia schiera di vortici alternati, osservata per la prima volta da Bénard.

Nella teoria della resistenza al moto dei corpi immersi in un fluido, è di notevole importanza lo studio di queste schiere vorticosi che hanno dato luogo ad una grandissima mole di ricerche. In particolare, il problema della loro stabilità fu affrontato inizialmente nel 1911 da Kàrmàn impostando la ricerca teorica sullo schema ormai classico di schiera doppia indefinita di vortici in moto piano irrotazionale di fluido perfetto illimitato.

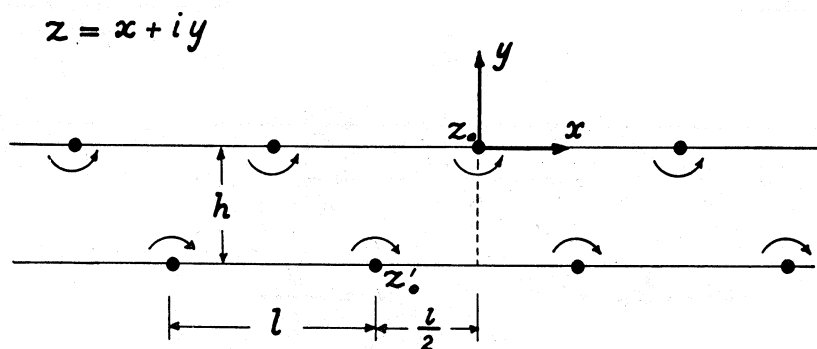


Fig. 1.

Lo schema in questione sottoposto ad una prima indagine portò al risultato di determinare una condizione sotto la quale la doppia schiera di vortici alternati risulta stabile [1]. Il risultato però, fu messo in dubbio da vari ricercatori per le modalità con cui era stato ottenuto, e che consistevano nel perturbare in maniera infinitesima uno solo dei vortici della schiera.

Infatti H. Lamb [2] nella 5ª edizione del suo celebre trattato di idrodinamica, dando una perturbazione assai più generale a tutto il sistema, ricavò una nuova condizione di stabilità che non coincideva con la primitiva, e che, con riferimento alla fig. 1, si scrive, come è ben noto,

$$(1) \quad \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}$$

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1964.

(1) Nelle prove sperimentali si opera generalmente con un cilindro circolare.

(vedi anche Villat [1]). Questo nonostante le vedute di Joukowski [3] in difesa del primo metodo, vedute che il Villat definisce erronee senza altra spiegazione.

Tutto ciò non deve far pensare che il problema fosse con ciò definitivamente risolto. Infatti, nel 1936 Schmieden [4] e nel 1939 Kotchin [5], introducendo particolari tipi di perturbazioni, dimostrarono che la doppia schiera di vortici alternati diventava instabile anche nella configurazione rispondente alla condizione sopracitata, quando nella equazione del moto si tenesse conto dei termini di secondo ordine.

A ciò seguì una trattazione ancor più generale effettuata da Domm [6] sulla cosiddetta configurazione a due parametri introdotta in precedenza da Maue [7] e Dolaptschieff [8]. Questi Autori considerando delle schiere di vortici ancora più generali di quelle studiate da Kàrmàn, e precisamente, doppie schiere con prefissato valore di $k = h/l$ e $\mu = d/l$, vedi fig. 2, ave-

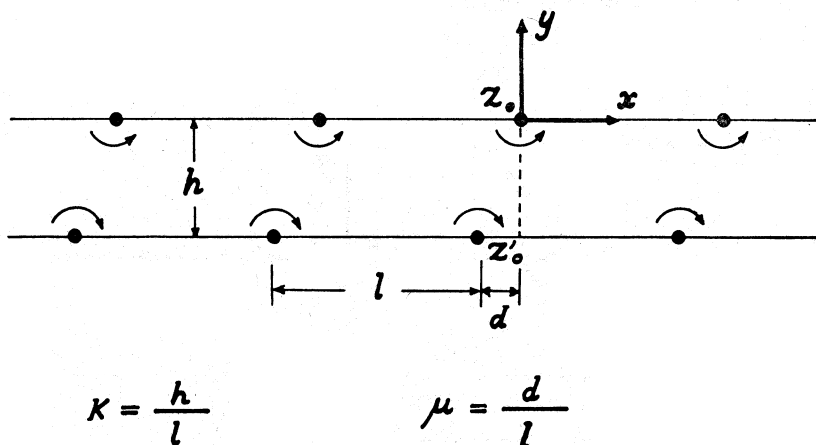


Fig. 2.

vano formulato indipendentemente la condizione di stabilità per queste ultime, seguendo i metodi tradizionali; questa condizione si scrive:

$$(2) \qquad \sin \pi \mu = \operatorname{sh} \pi k.$$

Domm nel suo lavoro prova che ogni duplice schiera di vortici in moto piano di fluido perfetto illimitato che soddisfa alla condizione di Maue (2) è instabile al secondo ordine, mentre ogni altra possibile disposizione, pure in duplice schiera, è instabile al primo ordine.

In questa trattazione la schiera di Kàrmàn diviene un caso particolare corrispondente a $\mu = 1/2$ e costituisce l'elemento avente il massimo valore del rapporto h/l e la più piccola velocità di traslazione fra la classe delle doppie schiere di vortici di massima stabilità, o per meglio dire, di minima instabilità.

Questo per sommi capi e nelle grandi linee, lo sviluppo, durante cinquanta anni circa, delle ricerche sulla stabilità delle schiere vorticosi; a prescindere

dai numerosissimi altri lavori relativi a estensioni della teoria originaria: vortici in fluido limitato, in fluido comprimibile ecc., di cui qui non ci occupiamo ⁽²⁾.

L'argomento però non può ritenersi esaurito perché quasi tutti i lavori eseguiti sulla stabilità ricalcano le orme dei precedenti, affetti tutti da un vizio di origine.

I ricercatori che hanno affrontato il problema si sono sempre preoccupati infatti, di assegnare per la stabilità dei sistemi studiati, delle condizioni che sono soltanto necessarie. Esistono tuttavia metodi semplici e speditivi per poter giungere a condizioni sufficienti, e dire quindi la parola definitiva sulla stabilità delle schiere di vortici; metodi che useremo in questa Nota e che ci permetteranno di stabilire definitivamente che la schiera vorticoso alternata di Kàrmàn è assolutamente instabile.

Occorre ricordare che già nel 1933 G. Durand [10], in una ricerca generalmente ignorata, aveva mostrato che unicamente per speciali sistemi di perturbazione, la schiera vorticoso alternata di Kàrmàn era instabile al primo ordine; l'instabilità dipendeva quindi, stranamente, dal tipo di perturbazione, cosa che avrebbe dovuto far supporre che le condizioni trovate di stabilità al 1° ordine non erano sufficienti, ma, tutt'al più, solo necessarie.

In questa Nota si dimostra invece che la schiera di Kàrmàn è sempre e totalmente instabile, nello schema adottato, per qualunque possibile perturbazione, ma si dà anche una plausibile spiegazione del perché in effetti essa venga osservata, sia pure per uno spazio relativamente breve, dietro al corpo che la provoca, e si dimostra che in particolare assetti, che corrispondono molto bene a quelli osservati sperimentalmente, la forza instabilizzante ha il valore minimo possibile.

In una prossima Nota sarà invece studiata la stabilità delle così dette schiere generalizzate di vortici di Maue e Dolaptschieff, di cui anche sperimentalmente nessuno ha mai constatato l'esistenza.

Sia dunque assegnata una doppia schiera di vortici alternati il cui potenziale complesso si scrive notoriamente, con riferimento alla fig. 1:

$$(3) \quad f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - z'_0)},$$

dove Γ è l'intensità di un singolo vortice.

Per studiare la stabilità del sistema dovremo, secondo il procedimento classico, spostare di una quantità infinitesima ogni vortice dalla sua posizione di equilibrio, per esaminare se la risultante delle forze agenti sui vortici tenda a riportarli nella posizione primitiva o ad allontanarli ulteriormente ⁽³⁾.

(2) Per una estesa bibliografia al riguardo, oltre [1], vedi anche [9].

(3) S'intende dire, con questa locuzione, che la risultante agisce sopra un cilindretto di raggio infinitesimo con centro nel centro del vortice.

Eseguendo il calcolo ora descritto, si ottiene (ved. Villat [1], H. Lamb [2]) la condizione necessaria perché la configurazione proposta sia stabile, che è data dalla formula (1) già citata:

$$(1) \quad \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}.$$

Possiamo ora ricorrere ad un artificio assai semplice per riconoscere se la condizione data è anche sufficiente: immaginiamo di disporre la doppia schiera in modo che sia rispettata la (1) e di vincolare tutti i vortici meno uno che lasceremo libero di muoversi ed al quale daremo un piccolo spostamento dalla sua posizione iniziale.

Se la configurazione espressa dalla (1) è effettivamente di equilibrio stabile per il noto teorema di Lord Rayleigh sui sistemi soggetti a vincoli, il sistema più vincolato dovrà essere ancora stabile, ed a maggior ragione, per lo stesso valore del rapporto h/l .

Per eseguire questa verifica, calcoliamo la velocità indotta dagli altri vortici sopra il centro del vortice posto in z_0 ; avremo:

$$(4) \quad u_0 - iv_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\cotg \frac{\pi}{l} (z - z_0) - \cotg \frac{\pi}{l} (z - z'_0) \right] - \frac{\Gamma}{2\pi i (z - z_0)} \right\}$$

e sostituendo la cotangente con il suo noto sviluppo

$$(5) \quad \cotg x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{x + k\pi} \right)$$

otteniamo:

$$(6) \quad u_0 - iv_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_0 - kl} + \frac{1}{z - z_0 + kl} \right) - \frac{\Gamma}{2li} \cotg \frac{\pi}{l} (z - z'_0) \right].$$

Dando ora a z_0 l'incremento infinitesimo ζ_0 , ponendo, quindi, al posto di z_0 , $z_0 + \zeta_0$, essendo $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$, passando al limite per $z \rightarrow z_0$, ne risulta la variazione di $u_0 - iv_0$:

$$(7) \quad \frac{d\zeta_0}{dt} - i \frac{d\eta_0}{dt} = - \frac{\Gamma \zeta_0}{\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 l^2} + \frac{\Gamma \pi}{2l^2 i} \frac{\zeta_0}{\sin^2 \frac{\pi}{l} (z_0 - z'_0)}.$$

È nota la somma

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ed essendo $z'_0 = z_0 - \frac{l}{2} - ih$ si ha inoltre:

$$(9) \quad \sin^2 \frac{\pi}{l} (z_0 - z'_0) = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}.$$

Introducendo la (8) e la (9) nella (7) questa diviene:

$$(10) \quad \frac{d\zeta_0}{dt} - i \frac{d\eta_0}{dt} = \frac{i \Gamma \pi (\xi_0 + i\eta_0)}{6l^2} - \frac{\Gamma \pi i (\xi_0 + i\eta_0)}{2l^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}}$$

da cui uguagliando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario, si ottiene il sistema :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d\eta_0}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{2l^2} \left(\frac{1}{\text{ch}^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{3} \right) \xi_0 \\ \frac{d\xi_0}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{2l^2} \left(\frac{1}{\text{ch}^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{3} \right) \eta_0. \end{cases}$$

D'altra parte la doppia schiera è posta nella configurazione retta dalla (1), il che implica che il sistema (11) si riduca a :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\eta_0}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{12l^2} \xi_0 \\ \frac{d\xi_0}{dt} = \frac{\Gamma\pi}{12l^2} \eta_0. \end{cases}$$

Nel piano ξ_0, η_0 l'equazione equivalente alle (12)

$$(13) \quad \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{\xi_0}{\eta_0}$$

possiede nell'origine un punto singolare, che rappresenta il punto di equilibrio del vortice ; senza bisogno di analisi approfondita si vede che questo punto singolare è un colle, singolarità sempre instabile.

Infatti confrontando la (12) con la equazione in forma normale

$$(14) \quad \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{C\xi_0 + D\eta_0}{A\xi_0 + B\eta_0}$$

è noto che si ha un colle quando il discriminante della equazione caratteristica relativa alla (14) $\Delta = (A - D)^2 + 4BC$ è > 0 , ed è inoltre la quantità $AD - BC < 0$, cosa che si verifica nella (13) avendosi $\Delta = 4$, $AD - BC = -1$. Lo stesso risultato si poteva anche ottenere per immediata integrazione diretta della (13) stessa.

Resta così dimostrato che non vi può essere stabilità e nemmeno instabilità differita ai termini del secondo ordine per la doppia schiera di Kàrmàn per qualunque possibile perturbazione.

Né vi è da temere che il risultato cui siamo giunti possa variare se si considerano, nell'equazione non lineare (6) da cui siamo partiti, anche i termini del 2° ordine e superiori : un teorema di Liapounoff assicura che essendo nell'equazione linearizzata (14), $AD - BC \neq 0$ e i coefficienti A, B, C, D non tutti nulli, l'andamento delle caratteristiche dell'equazione abbreviata è analogo a quello dell'equazione non lineare, e quindi l'analisi della singolarità è corretta tutte le volte che è $\Delta \geq 0$ e se è $\Delta < 0$, purché sia $A + D \neq 0$.

Occorre ancora fare qualche considerazione sul fatto che nella realtà, la schiera di Kàrmàn, sia pure in condizioni abbastanza particolari, si manifesta ed è variabile ed assoggettabile a misure, mostrando quindi una certa « stabilità » effettiva.

Ora questo fatto, naturalmente, è influenzato dalla presenza della viscosità del fluido reale, che non è messa in conto nei calcoli effettuati nello schema adottato ed agisce in senso stabilizzante; d'altra parte occorre prendere con una certa cautela le approssimazioni di calcolo fatte da C. C. Lin [11] studiando le soluzioni oscillanti delle equazioni di Navier linearizzate, per giungere a dare espressioni delle varie grandezze in gioco nelle schiere di vortici in fluidi viscosi, ed in particolare per la variazione di h/l in funzione del tempo.

È noto che già la soluzione del problema della resistenza del cilindro (e della sfera) con le equazioni di Navier linearizzate può ritenersi accettabile per numeri di Reynolds $N = U d/\nu$ (U = velocità della corrente uniforme asintoticamente a monte dell'ostacolo, d = diametro del cilindro, ν = viscosità cinematica del fluido), molto piccoli, addirittura inferiori a 1. È per lo meno dubbio che le stesse equazioni di partenza possano dar luogo a soluzioni che rappresentino sufficientemente bene un fenomeno che ha luogo per valori di $N = 1000 \div 5000$.

In effetti, una condizione necessaria di stabilità deve corrispondere all'annullarsi dell'incremento della velocità indotta sui vortici, provocato dalle perturbazioni apportate ai vortici stessi. Essendo tale incremento proporzionale, per il teorema di Kutta-Joukowski, alla variazione della forza esercitata su ciascun elemento, l'annullarsi di tale variazione comporta che la forza stessa, che, come abbiamo visto, agisce sempre in senso instabilizzante, abbia un minimo ⁽⁴⁾ per l'assetto corrispondente alla condizione trovata.

Si può ora constatare, ripartendo dalla (6) e dando uno spostamento δz_k a tutti i vortici di una fila e $\delta z'_k$ a tutti i vortici della seconda fila, che la condizione necessaria (ma non sufficiente) a cui si giunge per la stabilità, è la seguente ⁽⁵⁾:

$$(15) \quad \left| 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 - h^2}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 - h^2\right]} \cos \omega \left(k - \frac{1}{2}\right) l \right| \geq \\ \geq \left| \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}} \right) - \frac{2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \omega k l}{k^2} \right|.$$

D'altronde, dovendo questa formula valere per ogni valore di ωl compreso fra 0 e 2π (essendo ω la pulsazione spaziale delle perturbazioni applicate ai vortici), la (15) calcolata per $\omega l = \pi$, dà:

$$(16) \quad 0 = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k^2}$$

(4) Potrebbe avere anche un massimo; si verifica facilmente trattarsi del primo caso.

(5) Non si ripete il calcolo, notissimo, riportato nel testo del VILLAT (op. cit.) ed in maniera analoga in quello del LAMB (op. cit.), per giungere alla condizione (1), che dà la configurazione classica della schiera di Kàrmàn.

vale a dire:

$$(17) \quad \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt[3]{\frac{3}{1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}}}.$$

Nelle formule precedenti le somme che compaiono sono sempre estese da $k=1$ a $k \rightarrow \infty$ perché si suppongono perturbati tutti i vortici, ma esse sono del tutto generali per il modo con cui sono state dedotte, e k indica semplicemente il numero di vortici perturbati, nell'una e nell'altra schiera, oltre i due posti in z_0 e z'_0 ; sarebbe quindi più corretto scrivere il simbolo

di somma in questo modo $\sum_{k=1}^n$.

Si può facilmente vedere che per qualunque condizione di perturbazione, ci si trova sempre nella situazione:

$$(18) \quad \sqrt[3]{2} \leq \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} \leq \sqrt[3]{3}.$$

Infatti, perturbando un solo vortice per fila nella (17) scompare la somma al denominatore del secondo membro e resta il primo membro uguale a $\sqrt[3]{3}$; perturbandoli tutti invece, nota la somma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

la (17) si riduce a $\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt[3]{2}$.

Assodato quindi che stabilità non vi può mai essere, si nota che la forza instabilizzante è minima in corrispondenza di tutta una serie di situazioni, relative alle possibili configurazioni rette dalla (18), che si può anche scrivere:

$$(18') \quad 0,280 \leq \frac{h}{l} \leq 0,365.$$

Ciò porta ad attribuire ai fatti accennati questo significato: più il sistema vorticoso è perturbato, più il rapporto h/l in cui la schiera può mantenersi, sia pure per breve tempo, diminuisce; al contrario h/l aumenta al diminuire delle perturbazioni, sempre tuttavia restando nei limiti fissati dalle (18) e (18').

Questo risultato pare ben confermato dalle esperienze riportate nella Tav. I, figure 1 e 2; la fig. 1 rappresenta una delle prime foto (tratta da [12]) della schiera di Kàrmàn: il suo aspetto è molto perturbato, ed in essa, il rapporto h/l , valutato mediamente nella zona più regolare, vale 0,28; la fig. 2 è tratta da uno studio assai recente di A. Timme [13]: le traiettorie sono regolarissime e i vortici pressoché perfetti, indizio di una tecnica sperimentale moderna e raffinata. La schiera è quindi pochissimo perturbata e il rapporto h/l vale in media 0,35, quasi al limite superiore della (18'), come era intenzione di questo lavoro dimostrare.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] VILLAT, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Paris 1930 – Gauthier-Villars Ed.
- [2] H. LAMB, *Hydrodynamics*, V Ed. – Cambridge, University Press.
- [3] N. JOUKOWSKY, *Aerodynamique*, Paris, 1916.
- [4] C. SCHMIEDEN, *Zur Theorie der Kàrmànshen Wirbelstrasse*, « Ing. Arch. », 7, 215–241 (1936).
- [5] N. J. KOTCHIN, « Compt. Rend. (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'USSR », 24, 18–22 (1939).
- [6] U. DOMM, *Ueber Wirbelstrassen von geringster Instabilität*, « Z. angew. Math. u. Mech. », 36, 367–371 (1956).
- [7] A. MAUE, *Zur Stabilität der Kàrmànshen Wirbelstrasse*, « Z. Angew. Math. u. Mech. », 20, 129–137 (1940).
- [8] B. DOLAPTSCHIEFF, « Compt. Rend. de l'Academie Bulgare des Sciences » (1934).
- [9] B. R. WILLE, *Kàrmàn Vortex Street*, « Advances in Applied Mechanics », vol. VI. Academic Press – New York and London (1960).
- [10] G. DURAND, *Sur les petits mouvements d'un système infini de tourbillons autour d'une position d'équilibre*, Public. Scientif. du Ministère de l'Air, Paris (1933).
- [11] C. C. LIN, *On periodically oscillating wakes in the Oseen approximation in Studies etc. presented to R. v. Mises*, pp. 170–176, Acad. Press, New York (1939).
- [12] B. ECK, *Strömungslere an Hand von Strömungsbildern*, Köln (1931).
- [13] A. TIMME, *Ueber die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln*, « Ing. Arch. », 25, 205–225 (1957).

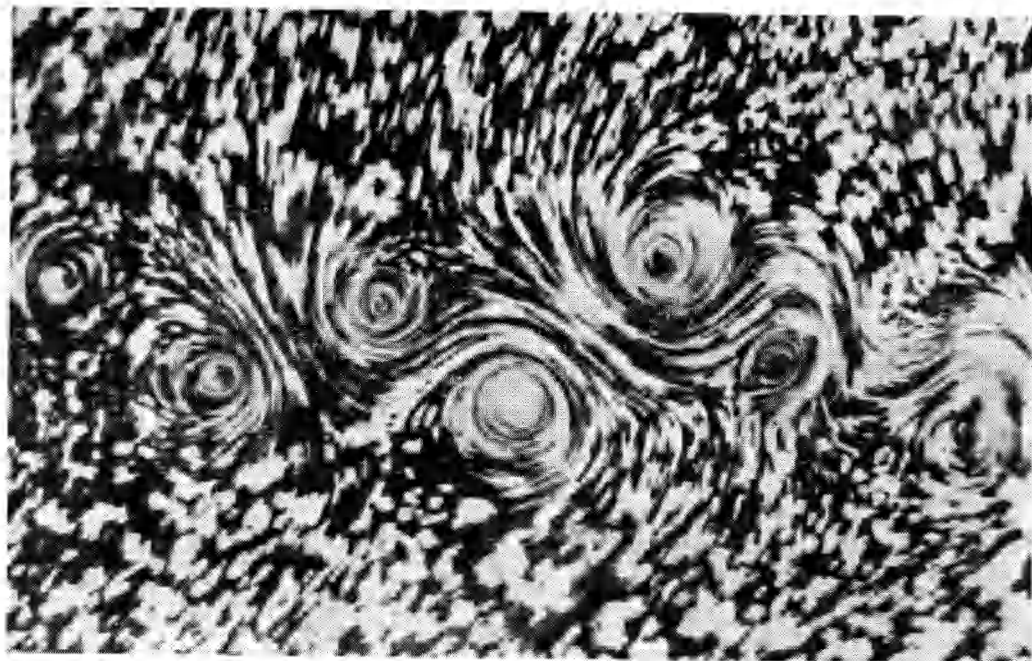


Fig. 1. – Vortici di Kàrmàn – Esperienze di B. Eck [12].

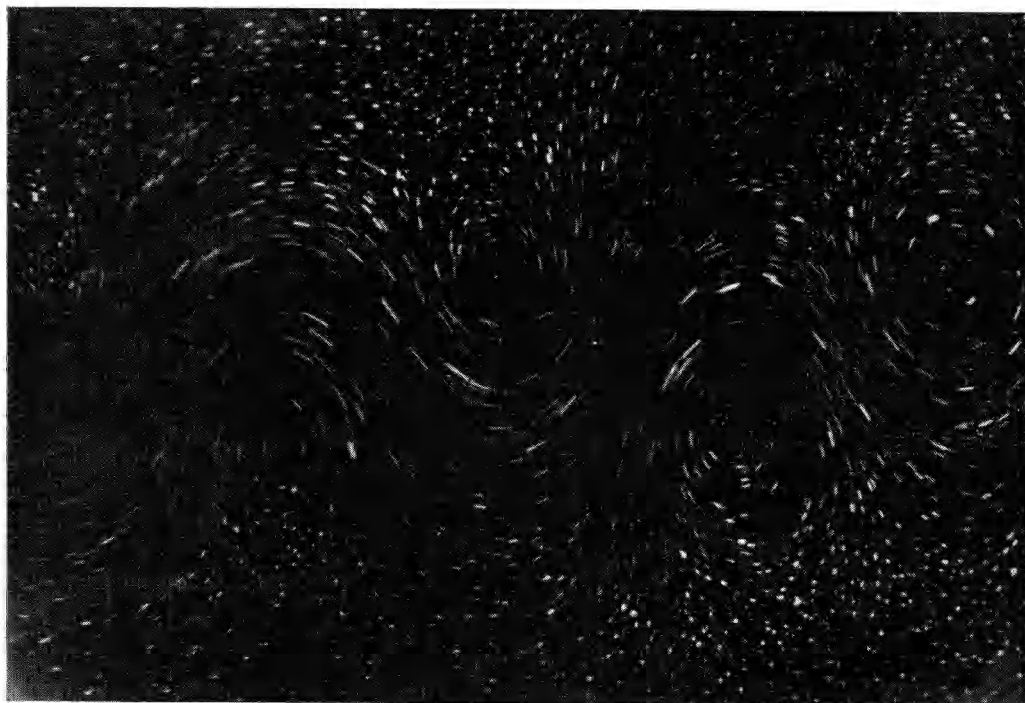


Fig. 2. – Vortici di Kàrmàn – Esperienze di A. Timme [13].