
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

M. V. D. BURMESTER

Sulla solubilità del gruppo delle collineazioni di un piano sopra un quasicorpo distributivo di ordine non—quadrato

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.2, p. 141–144.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_2_141_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometrie finite. — *Sulla solubilità del gruppo delle collineazioni di un piano sopra un quasicorpo distributivo di ordine non-quadrato* (*).
Nota di MICHELE V. D. BURMESTER, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Secondo una vecchia congettura di D. R. Hughes, il gruppo delle collineazioni di un piano finito sopra un quasicorpo distributivo proprio (cioè non-associativo) è solubile. Tutti i piani noti definiti sopra un quasicorpo distributivo [8] (ved. anche [2], [9], [14]) hanno come gruppo di collineazioni un gruppo solubile; però il caso generale non è stato studiato. Dimosteremo, in questa Nota, che la proprietà sussiste se l'ordine del piano non è un quadrato.

Siano π un piano definito dal quasicorpo distributivo proprio (non-associativo) $\mathfrak{Q}$, e $\mathfrak{G}$ il gruppo delle sue collineazioni (per le definizioni ved. [3], [13], [16]). $\mathfrak{G}$ contiene un sottogruppo normale metabeliano, $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{S}$, generato dalle traslazioni $\mathfrak{T}$ e dalle omologie duali delle traslazioni $\mathfrak{S}$ (ved. [2], [4]): un piano sopra un quasicorpo distributivo è un piano di traslazione avente come piano duale un piano di traslazione). Dato che $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{S}$ è solubile, $\mathfrak{G}$ è solubile se, e soltanto se, tale è $\mathfrak{G}/\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ può essere considerato come il gruppo delle collineazioni che fissano tre punti: ∞, A, O , ∞ essendo il punto speciale di π , A un qualsiasi punto improprio $\neq \infty$ e O un qualsiasi punto proprio (ciò accade perché $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{S})$, $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{S}) = 1$ e $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{S}$ è transitivo sulle copie di punti (X, Y) , essendo X un punto proprio e Y un punto improprio $\neq \infty$). Gli elementi di $\mathfrak{A}$ si chiamano *autotopismi*. Un autotopismo può essere rappresentato come una terna (S_1, S_2, S_3) di trasformazioni di $\mathfrak{Q}$, S_1, S_2, S_3 , essendo le trasformazioni indotte dalle permutazioni dei punti (O, y) sulla retta $O\infty$, (x, O) sulla AO ed (m) sulla ∞A , come risultato dell'azione dell'autotopismo in questione, considerando $OA\infty$ come triangolo delle coordinate. Assumeremo che questo triangolo, assieme ad un certo punto al finito E quale punto unità, coordinatizza $\mathfrak{Q}$ [13]; e ne indicheremo ordinatamente con l_i , $i = 1, 2, 3$, i lati $O\infty, OA, \infty A$.

Valgono le seguenti proprietà per gli autotopismi (S_1, S_2, S_3) ([3], [5], [9]):

A) (S_1, S_2, S_3) è un autotopismo se, e soltanto se, $(x \cdot y) S_1 = (x S_2) \cdot (y S_3)$, gli S_i essendo trasformazioni additive di $\mathfrak{Q}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del 17° gruppo di ricerca del C.N.R. Ai lavori del gruppo ha partecipato, nel 1963-1964, come *visiting professor* a Roma, il prof. D. R. Hughes (Ann Arbor); l'Autore desidera esprimergli la sua riconoscenza per averlo incoraggiato, con critiche e informazioni, nella sua ricerca.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1964.

B) Se (S_1, S_2, S_3) è un autotopismo, $S_2 = R_a S_1$, $S_3 = L_b S_1$, cioè $(S_1, S_2, S_3) = (S_1, R_a S_1, L_b S_1)$ dove R_a, L_b sono le rappresentazioni: $x \rightarrow xa, y \rightarrow by$, di $\mathfrak{D}$.

C) (S_1, S_2, S_3) è semilineare sopra il centro $\mathcal{K}^{(1)}$ di $\mathfrak{D}$; cioè $(R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3})(S_1, S_2, S_3) = (S_1, S_2, S_3)(R_{\beta_1}, R_{\beta_2}, R_{\beta_3})$ ove $\alpha_i \in \mathcal{K}$, $\beta_i = \alpha_i^\sigma$, denotando con σ un automorfismo del centro $\mathcal{K}^{(2)}$.

Dalla C) segue che il gruppo degli autotopismi lineari $\overline{\mathfrak{A}}$ sopra il centro (cioè quelli che permutano con ogni $(R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3})$, $\alpha_i \in \mathcal{K}$), formano un sottogruppo normale di $\mathfrak{A}$, e che $\mathfrak{A}/\overline{\mathfrak{A}}$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo degli automorfismi del centro. Dato che questo gruppo è ciclico, $\mathfrak{A}$ è solubile se, e soltanto se, tale è $\overline{\mathfrak{A}}$.

Consideriamo il sottogruppo $\mathfrak{Z}$ di $\overline{\mathfrak{A}}$ composto dagli elementi

$$(R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3}), \quad \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_3, \quad \alpha_i \in \mathcal{K},$$

dove le R_{α_i} designano le rappresentazioni: $x \rightarrow x\alpha_i$, $x \in \mathfrak{D}^{(3)}$. Dal fatto che $\mathfrak{Z}$ è commutativo segue che $\overline{\mathfrak{A}}$ è solubile se, e soltanto se, tale è $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$. Ci servirà il seguente

LEMMA. - Se $Z \in \mathfrak{Z}$ fissa un punto sui lati l_i di $\infty A O$ (diverso dai vertici), $\mathfrak{Z}$ fissa tutti i punti l_i .

Se $Z = (R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3})$, sia $yR_{\alpha_i} = y$ per certi $y \in \mathfrak{D}$ ed i ; allora R_{α_i} è l'identità.

TEOREMA. - Se $\mathfrak{D}$ è finito, ed ha come ordine un non-quadrato, $\mathfrak{G}$ è solubile.

Dimostriamo il teorema, provando che l'ordine di $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$ è dispari. Allora in virtù del teorema di Feit-Thompson [7], $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$ è solubile, e quindi tale è pure $\mathfrak{G}$.

Supponiamo, per assurdo, che l'ordine di $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$ sia pari; allora esisterà in $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$ un elemento di ordine due, cioè un $V \in \overline{\mathfrak{A}}$, $V \notin \mathfrak{Z}$, tale che $V^2 \in \mathfrak{Z}$. Sia $V = (S_1, S_2, S_3)$ e $V^2 = (R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3})$, $\alpha_i \in \mathcal{K}$ ($\alpha_1 = \alpha_2 \alpha_3$). Mostriamo poi che si possono determinare dei β_i tali che $\alpha_i = (\beta_i)^2$, $\beta_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2, 3$. Allora

$$\begin{aligned} (S_1^2, S_2^2, S_3^2)(R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3})^{-1} &= (S_1^2 R_{\alpha_1}^{-1}, S_2^2 R_{\alpha_2}^{-1}, S_3^2 R_{\alpha_3}^{-1}) = \\ &= ((S_1 R_{\beta_1}^{-1})^2, (S_2 R_{\beta_2}^{-1})^2, (S_3 R_{\beta_3}^{-1})^2) = 1. \end{aligned}$$

Pertanto, se $B = (R_{\beta_1}, R_{\beta_2}, R_{\beta_3})$, VB^{-1} ha ordine due. È ben noto (ved. ad esempio [6], [13]) che una collineazione di ordine due è centrale se l'ordine

(1) $\mathcal{K}$ è l'insieme degli elementi di $\mathfrak{D}$ che sono permutabili ed associabili (in tutti i modi) con ogni elemento di $\mathfrak{D}$.

(2) Se $\alpha \in \mathcal{K}$, $(x\alpha)S_1 = (x(R_a^{-1} \cdot a)\alpha)S_1 = ((xR_a^{-1})(a\alpha))S_1 = xS_1 \cdot (ba\alpha)S_1$ dalla B); ma $(ba\alpha)S_1$ è un automorfismo del centro (ved. [5] ed anche la (2) di [10]). Perciò $R_{\alpha_1}S_1 = S_1 R_{\alpha_1}^\sigma$. Dato che $S_2 = R_1 S_1$, $S_3 = L_b S_1$, $R_{\alpha_2}S_2 = R_{\alpha_2}R_1 S_1 = R_1 S_1 R_{\alpha_2}^\sigma$, $R_{\alpha_3}S_3 = R_{\alpha_3}L_b S_1 = L_b S_1 R_{\alpha_3}^\sigma$.

(3) Il fatto che queste terne rappresentano autotopismi segue dalla B).

del piano è un non-quadrato; più precisamente, se l'ordine è pari essa è una traslazione, mentre se l'ordine è dispari essa è una omologia.

Ora, se l'ordine di π è pari, poiché VB^{-1} non può essere una traslazione (in quanto VB^{-1} fissa un triangolo non-degenere) otteniamo una contraddizione, il che dimostra il teorema nell'ipotesi ammessa.

Se l'ordine di π è dispari, VB^{-1} è un'omologia involutoria. Dato che le sole omologie involutorie di π sono le ⁽⁴⁾

$$(R_{-1}, R_{-1}, 1) \quad , \quad (R_{-1}, 1, R_{-1}) \quad , \quad (1, R_{-1}, R_{-1}),$$

ne discende che $VB^{-1} \in \mathfrak{B}$ ossia $V \in \mathfrak{B} \cdot B = \mathfrak{B}$. Quest'ultima relazione contraddice l'ipotesi fatta, onde anche in questo caso il teorema è stabilito. Abbiamo così ridotto il teorema al problema di determinare dei $\beta_i \in \mathcal{K}$, tali che $(\beta_i)^2 = \alpha_i$.

Possiamo intanto supporre che l'ordine di V sia del tipo 2^m : infatti, s'esso fosse del tipo $2^m \cdot k$, con k dispari, basterebbe sostituire V con V^k , in quanto quest'ultimo elemento non apparterebbe a $\mathfrak{B}$ e avrebbe ordine 2^m . Detti q l'ordine di $\mathcal{K}$, q^d (d dispari) l'ordine di $\mathfrak{D}$, abbiamo $(q^d - 1) = (q - 1) \cdot (q^{d-1} + \dots + 1)$, ove $q^{d-1} + \dots + 1$ risulta dispari (poiché tali sono d e q). Pertanto, detti 2^{m_i} gli ordini delle S_i , $i = 1, 2, 3$ ($m_i \leq m$), ed ammesso che 2^{m_i} divida $q^d - 1$, esiste in $\mathcal{K}$ un elemento d'ordine 2^{m_i} . Ma α_i ha ordine 2^{m_i-1} , poiché $(S_1^2, S_2^2, S_3^2) = (R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, R_{\alpha_3})$; ne segue che — come volevasi — esistono dei $\beta_i \in \mathcal{K}$ tali che $(\beta_i)^2 = \alpha_i$. Perciò il teorema sarà stabilito se dimostreremo che 2^{m_i} divide $q^d - 1$ (per $i = 1, 2, 3$).

Se $2^{m_i} = 2$ (cioè $m_i = 1$), 2^{m_i} divide ovviamente $q^d - 1$. Se invece $2^{m_i} > 2$, consideriamo la suddivisione in classi

$$\{x\} = \{x, xS_i, xS_i^2, \dots, xS_i^{2^{m_i}-1}\}$$

dei punti della retta l_i . Notiamo che $\{x\}$ consta di esattamente 2^{m_i} punti, poiché $xS^w = x$, $w < 2^{m_i}$ con w pari implica $(xS_i^2)^{w/2} = x$; quindi, in base al Lemma, w dev'essere un multiplo di 2^{m_i} , il che non è possibile in quanto $0 < w < 2^{m_i}$. Se w è dispari, ancora in virtù del Lemma, $2w$ dev'essere un multiplo di 2^{m_i} , cioè $2w = 2^{m_i}k$, con k intero ≥ 1 . Quest'ultima relazione non può però valere, poiché w è dispari ed $m_i > 1$.

In definitiva, poiché l'insieme dei $q^d - 1$ punti di l_i risulta suddiviso in classi (disgiunte), ciascuna di 2^{m_i} elementi, così 2^{m_i} divide $q^d - 1$ ed il teorema è stabilito.

OSSERVAZIONE 1^a. — La restrizione che l'ordine di π sia un non-quadrato, entra in modo non del tutto essenziale nella dimostrazione del teorema.

(4) Sia (S_1, S_2, S_3) un'omologia involutoria; una delle S_i dev'essere l'identità:

1° sia $S_1 = 1$; dalle B), A) si ha $S_2^2 = (R_a)^2 = S_3^2 = (L_b)^2 = 1$ e $ab = 1$; quindi $a = b = \pm 1$;

2° sia $S_2 = 1$; dalla B) $R_a = S_1$ poiché $S_1^2 = 1$, e quindi $(R_a)^2 = 1$. Ciò implica $a = \pm 1$ e, dato che $ab = 1$ (dalla A)), $b = \pm 1$;

3° sia $S_3 = 1$ dalla B) $L_b = S_1$ poiché $S_1^2 = 1$, e quindi $(L_b) = 1$. Ciò implica $b = \pm 1$ e, dato che $ab = 1$, $a = \pm 1$.

Una facile modificazione di questa permette infatti di enunciare il teorema sotto forma più generale dicendo che: $\mathfrak{G}$ è solubile se l'ordine di $\mathfrak{D}$ sopra il suo centro è dispari.

OSSERVAZIONE 2^a. – In un prossimo lavoro nell'«Archiv der Mathematik», D. R. Hughes e l'autore della presente Nota otterranno un teorema ancora più generale, secondo cui: $\mathfrak{G}$ è solubile se l'ordine di $\mathfrak{D}$ sopra un qualsiasi suo nucleo è dispari.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. A. ALBERT, *On the collineation groups of certain non-Desarguesian planes*, «Portugaliae Math.», 18, 207–224 (1959).
- [2] — *On the collineation groups associated to twisted fields*, «Bull. Calcutta Math. Soc.».
- [3] — *Finite division algebras and finite planes*, «Proc. Symposia Appl. Math.», 10, 53–70 (1960).
- [4] F. BARTOLOZZI, *Il gruppo proiettivo di un piano sopra un Quasicorpo distributivo*, «Atti Acad. Palermo», IV Ser., 9, 115–125 (1958–1959).
- [5] R. H. BRUCK, *Contributions to the theory of loops*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 60, 245–354 (1946).
- [6] R. BAER, *Projectivities with fixed points on every line of the plane*, «Bull. Amer. Math. Soc.», 52, 273–286 (1946).
- [7] W. FEIT and J. THOMPSON, *Solvability of groups of odd order*, «Pacific J. Math.», 13, 775–1029 (1963).
- [8] D. R. HUGHES, *Review of some results in collineation groups*, «Proc. Symposia Pure Math.», 1, 42–55 (1959).
- [9] — *Collineation groups of non-Desarguesian planes. I*, «Amer. J. Math.», 81, 921–938 (1959).
- [10] — *Collineation groups of non-Desarguesian planes. II*, «Amer. J. Math.», 82, 389–392 (1960).
- [11] D. R. HUGHES and E. KLEINFELD, *Seminuclear extensions of Galois fields*, «Amer. J. Math.», 82, 389–392 (1960).
- [12] G. PANELLA, *Le collineazioni nei piani di M. Hall*, «Riv. Mat. Parma», II Ser., 1, 171–184 (1960).
- [13] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Berlin 1955.
- [14] R. SANDLER, *The collineation groups of some finite projective planes*, «Portugaliae Math.», 21, 189–199 (1962).
- [15] — *Autotopism groups of some finite non-associative algebras*, «Amer. J. Math.», 84, 239–264 (1962).
- [16] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry* (with an Appendix on Finite non-Desarguesian planes by L. Lombardo-Radice), Roma 1960.