
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LUCJAN SZAMKOŁOWICZ

Sur une classification des triplets de Steiner

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.2, p. 125–128.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_2_125_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi combinatoria. — *Sur une classification des triplets de Steiner.* Nota di LUCJAN SZAMKOŁOWICZ, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Dans le travail [5] j'ai présenté une certaine classification des systèmes de Steiner $\sigma(2, l, m)$ ou bien des plans P_i^k , ce qui revient au même, vu l'engendrement par les sous-ensembles à trois éléments linéairement indépendants.

Dans le présent travail je me bornerai à certaines remarques concernant ladite classification dans le cas des triplets de Steiner, c'est-à-dire des plans P_i^3 . Il y est plus aisé d'employer la notion des algèbres A_n^3 qui équivaut à la notion des plans P_i^3 .

J'appelle *algèbre* A_n^3 une paire ordonnée $\langle A, \circ \rangle$, où A est un ensemble à n points et $\circ$ est une opération binaire satisfaisant aux conditions :

$$\begin{array}{ll} W_1 & a \circ a = a \\ W_2 & a \circ b = b \circ a \\ W_3 & a \circ (a \circ b) = b. \end{array}$$

Trois éléments $a, b, c \in A$ sont appelés non colinéaires lorsqu'ils sont deux à deux différents et $a \circ b \neq c$.

Lorsque chaque triplet d'éléments non colinéaires $a, b, c \in A$ engendre tout l'ensemble A , l'algèbre A_n^3 est appelée *plan non dégénéré*. Lorsqu'un triplet d'éléments engendre l'ensemble A , et un autre ne l'engendre pas, nous appelons cette algèbre un *plan dégénéré*. Lorsque aucun des triplets n'engendre tout l'ensemble A , nous appelons cette algèbre un *espace*.

Le problème classique de Steiner concernant l'existence des triplets de Steiner, résolu par M. Reiss [2] peut être généralisé comme il suit : Existe-t-il pour tout n de la forme $6t + 1$ ou $6t + 3$ tout au moins une algèbre A_n^3 qui soit un plan non dégénéré ?

Pour trouver la réponse à cette question, il est nécessaire d'examiner les constructions correspondantes présentées par M. M. Reiss [2], Th. Skolem [3], H. Hanani [1] et autres. Dans le travail [5] j'ai classifié quelques constructions ci-mentionnées.

1. Évidemment les algèbres PA_n^3 et AA_n^3 (voir [5]) sont des espaces.

J'appellerai algèbres DA_n^3 (voir [4]) les algèbres construites de la manière suivante :

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1964.

Soit $A_n^3 = \langle \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}, \circ \rangle$ et soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_i, b_0, b_1, \dots, b_{i-1}\}$ un ensemble à $2i + 1$ points. Nous construisons l'algèbre, A_{2i+1}^3 , satisfaisant à $W1 - 3$ et aux conditions suivantes :

$$W4 \quad a_k \circ a_m = b_{(k+m) \bmod i} \quad k, m = 0, 1, \dots, i-1; k \neq m$$

$$W5 \quad a_k \circ a_i = b_{(2k) \bmod i} \quad k = 0, 1, \dots, i-1.$$

En partant de l'algèbre A_3^3 , nous obtiendrons de cette manière une suite d'algèbres A_n^3 , où n est un élément de la suite $a_{s+1} = 2a_s + 1; a_0 = 1$.

Posons $\Pi_{2(i,0)}^r = \underbrace{(\dots(a_2 \circ a_1) \circ a_0) \circ a_1 \circ a_0) \dots}_{r \text{ parenthèses}}$. Nous allons démontrer le

LEMME 1.1. - $\Pi_{2(i,0)}^{2s-5} = a_s$, pour $s = 3, 4, \dots, i$.

Évidemment :

$$\Pi_{2(i,0)}^1 = (a_2 \circ a_1) \circ a_0 = b_3 \circ a_0 = a_3.$$

Soit :

$$\Pi_{2(i,0)}^{2k-5} = a_k, \text{ pour } k \geq 3,$$

on a alors :

$$\Pi_{2(i,0)}^{2(k+1)-5} = (\Pi_{2(i,0)}^{2k-5} \circ a_1) \circ a_0 = (a_k \circ a_1) \circ a_0 = b_{k+1} \circ a_0 = a_{k+1} \quad (\text{pour } k+1 \leq i).$$

LEMME 2.1. - $\Pi_{2(i,0)}^{2t-6} = b_t$, pour $t = 3, 4, \dots, i-1$.

Évidemment :

$$\Pi_{2(i,0)}^0 = a_2 \circ a_1 = b_3.$$

Soit

$$\Pi_{2(i,0)}^{2k-6} = b_k, \text{ pour } k \geq 3,$$

on a alors :

$$\Pi_{2(i,0)}^{2(k+1)-6} = (\Pi_{2(i,0)}^{2k-6} \circ a_0) \circ a_1 = a_k \circ a_1 = b_{k+1} \quad (\text{pour } k+1 \leq i-1).$$

En raison de $a_0 \circ a_1 = b_1$, $a_0 \circ a_2 = b_2$ et des lemmes 1.1. et 2.1, nous constatons immédiatement que le triplet a_0, a_1, a_2 d'éléments non-colinéaires engendre tout l'ensemble A . Comme l'algèbre DA_n^3 contient la sous-algèbre DA_7^3 , qui est, ce qu'on peut prouver aisément, un plan non-dégénéré, il s'ensuit :

THÉORÈME 1.1. - Toute algèbre DA_n^3 ($n > 7$) est un plan dégénéré.

2. Dans le travail [3], Th. Skolem a construit les algèbres A_n^3 suivantes, que j'appellerai algèbres SA_n^3 .

Soit un ensemble $A = \{a_0^0, \dots, a_{2t}^0, a_0^1, \dots, a_{2t}^1, a_0^2, \dots, a_{2t}^2\}$ à $3(2t+1)$ éléments. Nous construisons l'algèbre $A_{3(2t+1)}^3$ satisfaisant à $W1 - 3$ et aux conditions suivantes :

$$W4' \quad a_i^k \circ a_j^{(k+1) \bmod 3} = a_{(2j-i) \bmod (2t+1)}^k, \quad i \neq j$$

$$W5' \quad a_i^k \circ a_i^{(k+1) \bmod 3} = a_i^{(k+2) \bmod 3}$$

Nous allons démontrer le

LEMME 1.2. — $\Pi_{2(1,0)}^{2s-5} = a_s^k$, pour $s = 3, 4, \dots, 2t$.

Évidemment

$$\Pi_{2(1,0)}^1 = (a_2^k \circ a_1^k) \circ a_0^k = a_{t+2}^{(k+1) \bmod 3} \circ a_0^k = a_3^k.$$

Soit

$$\Pi_{2(1,0)}^{2p-5} = a_m^k, \text{ pour } m \geq 3;$$

alors, en supposant $m < 2t$, on a

$$\Pi_{2(1,0)}^{2(p+1)-5} = (\Pi_{2(1,0)}^{2p-5} \circ a_1^k) \circ a_0^k = (a_m^k \circ a_1^k) \circ a_0^k:$$

par conséquent, pour m pair, on a

$$(a_m^k \circ a_1^k) \circ a_0^k = a_{\frac{(2t+1)+m+1}{2}}^{(k+1) \bmod 3} \circ a_0^k = a_{m+1}^k,$$

et pour m impair

$$(a_m^k \circ a_1^k) \circ a_0^k = a_{\frac{(k+1) \bmod 3}{2}}^{(k+1) \bmod 3} \circ a_0^k = a_{m+1}^k,$$

ce qui donne la thèse du lemme.

Il s'ensuit du lemme 1.2 que le triplet des éléments non-colinéaires a_0^o, a_1^o, a_2^o engendre tout l'ensemble $\{a_0^o, \dots, a_{2t}^o\}$ et, vu $a_1^o \circ a_{2t}^o = a_0^o \circ a_2^o = a_1^{(k+1) \bmod 3} \circ a_0^o = a_2^{(k+1) \bmod 3}$, ce triplet engendre également tout l'ensemble A.

Nous avons ainsi le

THÉOREME 1.2. — *Aucune des algèbres SA_n^3 n'est un espace.*

L'algèbre SA_9^3 est évidemment un plan non-dégénéré (voir [5]). Nous allons démontrer le

THÉOREME 2.2. — *L'algèbre SA_{15}^3 est un plan non-dégénéré.*

Démonstration. — Soient a_i^p, a_j^q, a_k^r des éléments non-colinéaires de l'algèbre SA_n^3 . Alors, ce qui est aisé de vérifier, ces éléments engendrent un ensemble tout au moins à 3 éléments qui ont les mêmes indices en haut. Lorsque m, n, s sont des nombres différents, alors le triplet a_m^t, a_n^t, a_s^t engendre un ensemble, tout au moins à 9 éléments. Soit un élément a n'appartenant pas à cet ensemble. Il existe alors tout au moins 9 éléments différents de a et n'appartenant pas également à cet ensemble. Or, si l'algèbre SA_n^3 est un plan dégénéré, nous avons alors $n > 9 + 9 + 1 = 19$.

Nous allons démontrer le

THÉOREME 3.2. — *Toute algèbre SA_m^3 est un plan dégénéré.*

Nous démontrerons que le triplet des éléments non-colinéaires a_0^o, a_m^o, a_{2m}^o de cette algèbre, engendre une sous-algèbre à 9 éléments.

D'après W4' et W5', on a

$$\begin{aligned} a_0^k \circ a_m^k &= a_{2m}^{(k+1) \bmod 3}, a_0^k \circ a_{2m}^k = a_m^{(k+1) \bmod 3}, a_m^k \circ a_{2m}^k = \\ &= a_0^{(k+1) \bmod 3} \text{ et } a_i^k \circ a_i^{(k+1) \bmod 3} = a_i^{(k+2) \bmod 3}; \end{aligned}$$

donc, en vertu de $W_1 - 3$, l'ensemble engendré par le triplet a_o^o, a_m^o, a_{2m}^o se compose exclusivement des éléments de la forme a_o^k, a_m^k, a_{2m}^k où $k=0, 1, 2$. Il s'ensuit que toute algèbre SA_{9m}^3 est un plan dégénéré.

Je ne sais pas lesquelles d'entre les autres algèbres SA_n^3 ($n = 21, 33, 39, \dots$) sont des plans non-dégénérés.

Les théorèmes ci-mentionnés et les faits, déjà connus (voir p. ex. [3], [5]) entraînent l'existence d'une seule algèbre A_7^3 , l'existence d'une seule algèbre A_9^3 et l'existence de deux algèbres A_{13}^3 non-isomorphiques. Toutes ces algèbres sont des plans non-dégénérés. Il existe tout au moins 3 algèbres A_{15}^3 non-isomorphiques: le plan non-dégénéré SA_{15}^3 , le plan dégénéré DA_{15}^3 et l'espace PA_{15}^3 . Le problème d'existence pour tout n de la forme $6t + 1$ ou $6t + 3$ d'un plan non-dégénéré parmi les algèbres A_n^3 reste toujours ouvert. Le problème des nombres des algèbres A_n^3 non-isomorphiques est pareillement ouvert, même dans le cas $n = 15$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. HANANI, *A note on Steiner triple systems*, «Mathematica Scandinavica», 8, 154-156 (1960).
- [2] M. REISS, *Über eine Steinersche Combinatorische Aufgabe*, «J. Reine Angew. Math.», 56, 326-344 (1859).
- [3] TH. SKOLEM, *Some remarks on the triple systems of Steiner*, «Mathematica Scandinavica», 6, 273-280 (1958).
- [4] L. SZAMKOŁOWICZ, *On the problem of existence of finite regular planes*, «Colloquium Mathematicum», IX. 2, 246-250 (1962).
- [5] L. SZAMKOŁOWICZ, *Remarks of finite regular planes*, «Colloquium Mathematicum», X.1, 31-37 (1963).