
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE EVANGELISTI

Sopra il problema della riduzione al discreto dei sistemi continui

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.2, p. 107–112.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_2_107_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sopra il problema della riduzione al discreto dei sistemi continui.* Nota ^(*) del Corrisp. GIUSEPPE EVANGELISTI.

1. Viene qui sviluppata una precedente ricerca, apparsa in questi stessi Atti ⁽¹⁾, utilizzandone l'impostazione e i simboli. Sono considerati i mezzi di propagazione unidimensionale governati dal sistema a derivate parziali

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathfrak{L} \frac{\partial i}{\partial t} + \mathfrak{R} i = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + \mathfrak{C} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{S} v = 0 \end{cases}$$

dove i coefficienti $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$ sono funzioni continue, e non negative, della sola x , definite nell'intervallo $0 \leq x \leq l$ occupato dal mezzo. Ciò che risulterà per il sistema (1) vale anche per l'equazione del 2° ordine

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + qu,$$

con α, β, q funzioni continue e p funzione derivabile della sola x , a cui il sistema (1) si riconduce sotto debite restrizioni. Anche qui viene fatto riferimento, al solo scopo di fissare le idee, a una linea elettrica inizialmente in riposo ed eccitata all'estremo $x = 0$ dalla sorgente di tensione $v_0(t)$, per la quale si ammette l'esistenza della trasformata di Laplace $V_0(s)$.

Trasferita la trattazione nel dominio delle trasformate di Laplace $V(x, s)$, $I(x, s)$ delle due incognite $v(x, t)$ e $i(x, t)$, (di cui è ammessa l'esistenza) le equazioni (1) cedono il posto al sistema differenziale ordinario nella variabile x e nel parametro s

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dx} + (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) I = 0 \\ \frac{dI}{dx} + (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S}) V = 0. \end{cases}$$

La soluzione del sistema (2), associato alle dovute condizioni ai limiti, determina le due soluzioni fondamentali del dominio immagine sotto forma di funzioni della variabile complessa s contenenti la x come parametro: la funzione di trasferta $G(x, s)$ (rapporto fra la tensione $V(x, s)$ in x e la ten-

(*) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1964.

(1) G. EVANGELISTI, *Sopra le trasformate di Laplace dei problemi di propagazione*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume XXXVI (1963).

sione applicata $V_0(s)$ e l'ammettenza di trasferta $Y(x, s)$ (rapporto fra la corrente $I(x, s)$ in x e la stessa $V_0(s)$). Queste due funzioni si scrivono:

$$(4) \quad \begin{cases} G(x, s) = \frac{\{Z_u(s)M(l, s) + N(l, s)\}Q(x, s) - \{Z_u(s)P(l, s) + Q(l, s)\}N(x, s)}{Z_u(s)M(l, s) + N(l, s) + Z_i(s)Z_u(s)P(l, s) + Z_i(s)Q(l, s)} \\ Y(x, s) = \frac{\{Z_u(s)P(l, s) + Q(l, s)\}M(x, s) - \{Z_u(s)M(l, s) + N(l, s)\}P(x, s)}{Z_u(s)M(l, s) + N(l, s) + Z_i(s)Z_u(s)P(l, s) + Z_i(s)Q(l, s)}. \end{cases}$$

La natura delle soluzioni immagine (4) nei confronti dell'argomento s fu accertata, a suo tempo, nei seguenti termini. Le funzioni M, N, P, Q , che caratterizzano il mezzo, sono analitiche intere. Le funzioni Z_i e Z_u , che rappresentano i sistemi terminali, possono essere assunte come razionali fratte senza sostanziale sacrificio di generalità, salvo l'esclusione di componenti estesi all'infinito: infatti, se i sistemi terminali sono discreti l'assunto è vero senz'altro; se essi contengono sistemi continui, purché finiti e in numero finito, oltre che governati anch'essi da equazioni del tipo (1), basta ripetere il ragionamento un numero sufficiente di volte. Le soluzioni (4) sono perciò esprimibili, in quanto funzioni meromorfe, come quoziente di due funzioni intere, ciascuna delle quali ammetterà, in generale, una successione infinita di zeri. Ne consegue che esiste, per ciascuna delle funzioni (4), uno spettro poli-zeri, in cui i poli esauriscono le singolarità al finito. Consegue pure che è strumento valido, per esplorare una qualsiasi regione del piano s nei riguardi del contenuto di poli e di zeri, il metodo dell'indicatore logaritmico.

Tutto ciò vale in linea di principio. Nel fatto, l'analisi di un sistema governato dalle (4) è attuabile soltanto se il problema matematico si riduce a un'estrema semplicità nei riguardi tanto del mezzo quanto del contorno. Ma ciò è lungi dall'esaurire gli interessi applicativi, specialmente nel campo dei sistemi in retroazione, dove le funzioni Z_i e Z_u possono risultare notevolmente complesse. In questi casi più difficili non si può impostare un'analisi se non semplificando; e ciò significa, per un verso o per l'altro, rinunciare al rigore. La necessità è dura, ma allo stato delle cose non ammette alternative.

La presente Nota intende esaminare il problema della semplificazione, quale risulta dalla natura matematica, or ora messa in chiaro, delle funzioni risolutive (4).

2. Ragionando in termini di legittimità matematica, l'approssimazione delle quattro funzioni caratteristiche del mezzo M, N, P, Q con altrettanti polinomi contiene la sola arbitrarietà di sostituire l'algoritmo infinito che definisce una funzione intera con una sua ridotta. Una siffatta sostituzione riduce le (4) a funzioni razionali fratte di s e porta il problema su di un livello elementare e matematicamente sicuro; esistono diversi mezzi per eseguirla.

Il mezzo più ovvio è quello di appoggiarsi agli sviluppi in serie di potenze. Indicata col simbolo $F(s)$ una qualunque delle quattro funzioni del mezzo

(in cui si lascia fuori evidenza, perché non interessa, la variabile spaziale x la quale, ovviamente, comparirà nei coefficienti) risulta

$$(5) \quad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n$$

che viene arrestata a un certo termine di grado v . Si connettono, a questo mezzo, alcuni grossi vantaggi: la serie generatrice è certamente convergente; i metodi classici d'integrazione per serie permettono di ricavare il polinomio approssimatore direttamente dal sistema (3); una volta eseguita la sostituzione, l'elaborazione algebrica delle funzioni (4) procede nel modo più comodo ⁽²⁾.

Quando, come succede di regola, gli zeri della funzione $F(s)$ sono in numero infinito, così da formare, ordinati in modulo crescente, la successione

$$z_1, z_2, \dots, z_v, \dots$$

entra in considerazione la possibilità di utilizzare uno sviluppo in prodotto infinito. Vi sono connessi alcuni svantaggi: l'integrazione per serie non serve più; il teorema di Weierstrass sulla decomposizione in fattori primari avverte che non è sempre possibile scrivere lo sviluppo della funzione intera $F(s)$ nella forma

$$(6) \quad F(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{s}{z_n} \right\},$$

dove i fattori di convergenza sono tutti uguali all'unità: condizione, quest'ultima, indispensabile perché i prodotti parziali diano luogo a polinomi. Ma quando una espressione come la (6) esiste, ed è stata trovata, essa presenta, sullo sviluppo in serie (5), uno speciale vantaggio: dato che gli zeri della funzione da approssimare sono già in ordinata evidenza, gli zeri dei polinomi interpolatori sono stabili (nel senso che le approssimazioni più avanzate lasciano intatti gli zeri delle approssimazioni precedenti).

(2) Interessa rilevare che si riporta alla serie (5) anche lo sviluppo in frazione continua. Le relazioni fra i relativi coefficienti sono note fin dai primordi dell'analisi. La serie di potenze

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$$

equivale (anche nei riguardi delle condizioni di convergenza) alla frazione continua

$$a_0 + \cfrac{a_1 s}{1} - \cfrac{\cfrac{a_2}{a_1} s}{1 + \cfrac{a_2}{a_1} s} - \cfrac{\cfrac{a_3}{a_2} s}{1 + \cfrac{a_3}{a_2} s} - \dots$$

La frazione continua ha un corrispettivo fisico, perché costituisce la rappresentazione diretta di una catena di quadripoli in cascata.

In virtù dell'equivalenza fra serie e frazioni continue, le indagini del testo valgono anche per le così dette linee artificiali, che appunto sostituiscono il continuo con una catena di celle a costanti concentrate.

4. Non sarà forse inutile, prima di passare a una discussione quantitativa, considerare il caso elementare della linea elettrica uniforme (come è già stato fatto nella Nota precedente). Si trova subito che quando i parametri di linea $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$, sono costanti, le (4) danno luogo alle equazioni

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} G(x, s) &= \frac{Z_u \cosh(l-x)\gamma + Z_o \sinh(l-x)\gamma}{(Z_i + Z_u) \cosh l\gamma + Z_o \sinh l\gamma + Z_i Z_u \frac{1}{Z_o} \sinh l\gamma} \\ Y(x, s) &= \frac{\cosh(l-x)\gamma + Z_u \frac{1}{Z_o} \sinh(l-x)\gamma}{(Z_i + Z_u) \cosh l\gamma + Z_o \sinh l\gamma + Z_i Z_u \frac{1}{Z_o} \sinh l\gamma} \end{aligned} \right.$$

dove i parametri γ e Z_o indicano, al solito, la funzione di propagazione e l'impedenza caratteristica della linea.

Indicata con k un'adatta costante - che potrà assumere, secondo i casi, il valore $(l-x)$ o il valore l - valgono gli sviluppi in serie

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \cosh k\gamma &= 1 + \frac{1}{2!} k^2 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S}) + \\ &\quad + \frac{1}{4!} k^4 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R})^2 (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S})^2 + \dots \\ Z_o \sinh k\gamma &= k (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) \left\{ 1 + \frac{1}{3!} k^2 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5!} k^4 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R})^2 (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S})^2 \dots \right\} \\ \frac{1}{Z_o} \sin k\gamma &= k (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S}) \left\{ 1 + \frac{1}{3!} k^2 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5!} k^4 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R})^2 (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S})^2 \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

e gli sviluppi in prodotto infinito

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \cosh k\gamma &= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{4 k^2 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S})}{\pi^2 (2n-1)^2} \right\} \\ Z_o \sinh k\gamma &= k (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{k^2 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S})}{\pi^2 n^2} \right\} \\ \frac{1}{Z_o} \sinh k\gamma &= k (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S}) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{k^2 (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) (\mathfrak{C}s + \mathfrak{S})}{\pi^2 n^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

5. La sostituzione delle meromorfe (4) con delle razionali fratte porta a conseguenze più che ovvie: scompare la singolarità essenziale all'infinito; sono ignorati i poli e gli zeri esterni a una certa regione finita del piano s ; i poli e gli zeri interni a questa regione cambiano posto. Gli errori che ne conseguono sono tollerabili, purché siano soddisfatti due ordini di condizioni: le singolarità trascurate devono dare contributi sufficientemente piccoli; la

configurazione poli-zeri mantenuta in conto non deve scostarsi troppo da quella originaria.

Si vede bene che il problema è dominato da tutti quanti i componenti del sistema – dalle impedenze d'estremità non meno che dalle caratteristiche del mezzo – e non si presta a una trattazione generale. Si può tuttavia intravedere qualche orientamento di massima.

Riguardo alle omissioni, è protagonista essenziale la struttura del sistema: occorre che gli zeri e le singolarità soppressi cadano là dove il sistema praticamente non reagisce più, cioè ben fuori dalla sua banda passante. Per lo spettro poli-zeri rimasto in campo, vi sono buone ragioni d'aspettarsi che la scelta del polinomio interpolatore abbia forte incidenza, e che lo sviluppo in prodotto finito, quando esiste, offra prospettive migliori dello sviluppo in serie. La congettura si basa sull'esperienza delle trascendenti elementari, da cui appunto discendono gli sviluppi (8) e (9). Un altro indizio è dato, per la linea uniforme, dai due casi più semplici contenuti nelle equazioni (7).

La linea ad alimentazione diretta ($Z_i = 0$) con l'uscita aperta ($Z_u = \infty$) riduce le (7) alla forma

$$(10) \quad \begin{cases} G(s) = \frac{\cosh(l-x)\gamma}{\cosh l\gamma} \\ Y(s) = \frac{\frac{1}{Z_0} \sinh(l-x)\gamma}{\cosh l\gamma} \end{cases}$$

Quando all'alimentazione diretta ($Z_i = 0$) fa riscontro l'uscita in corto circuito ($Z_u = 0$), valgono le determinazioni

$$(11) \quad \begin{cases} G(s) = \frac{Z_0 \sinh(l-x)\gamma}{Z_0 \sinh l\gamma} \\ Y(s) = \frac{\cosh(l-x)\gamma}{Z_0 \sinh l\gamma} \end{cases}$$

Tutte le soluzioni immagine (10) e (11), antitrasformate a mezzo del teorema dei residui, generano delle serie che convergono alle soluzioni oggetto. Per questi casi particolari delle (7) – ma, evidentemente, soltanto per essi – i prodotti parziali di v^{mo} grado dei prodotti infiniti (9) riproducono esattamente i v zeri e i v poli interni alla regione di loro competenza; ciò che è lungi dal succedere per le somme parziali delle serie (8) ⁽³⁾.

(3) L'approssimazione razionale attraverso i prodotti infiniti (9) era stata considerata, molto tempo fa, dallo scrivente. Vedi in proposito: G. EVANGELISTI, *La regolazione delle turbine idrauliche*. Bologna, Zanichelli, 1947. Cap. IV.

Una trattazione molto più recente, svolta sostanzialmente sulla stessa linea e con gli stessi risultati, si trova in R. OLDENBURGER-R. E. GOODSON, *Hydraulic Line Dynamics*, «Atti III Congresso IFAC», Basel (1963).

È il caso di osservare che in entrambe queste ricerche il problema è risolto nel caso di un mezzo uniforme, e sotto l'inutile restrizione che i parametri dissipativi $\Re$ e $\Im$ siano trascurabili.

8. Si conclude con qualche parola, del resto ovvia, sul modo con cui i problemi ora trattati sono visti dal fisico matematico, che è essenzialmente un costruttore di modelli matematici.

Quando le equazioni da risolvere costituiscono il modello di un sistema concreto, e interessano in quanto tali, la critica matematica non può restare disgiunta da quella delle ipotesi, perché non esistono modelli matematici immuni da infedeltà. Una volta salvate le basi essenziali, semplificare un processo risolutivo significa abbandonare un modello matematico per un altro; ciò che comporta problemi non di principio, ma di grado di fedeltà. Occorre allora un'indagine preliminare delle schematizzazioni comuni ai due modelli, per cercare di conoscere i limiti di approssimazione che nessun rigore matematico riuscirà mai ad oltrepassare; segue l'indagine comparativa. Entrambe le indagini sono di confronto con la realtà (ed oggi, nell'era dei calcolatori elettronici, tali confronti trovano ausilio in modelli matematici di alta fedeltà i quali, benché ancora refrattari alle analisi, sono suscettibili di esplorazioni numeriche).

In materia di confronto fra modelli matematici può capitare che una posizione del modello più elaborato, la quale sia stata abbandonata nel modello più semplice, costituisca essa stessa una violazione della realtà. Il problema in esame ne dà un esempio: l'assunto che un sistema continuo si estenda all'infinito conduce, nel dominio immagine, a funzioni con punti di diramazione, che sono le singolarità più delicate e insidiose; ma i sistemi finiti, come non può mancare di essere un sistema reale, non ammettono al finito altro che poli, che sono le singolarità più elementari.