
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LUIGI AMERIO

Ancora sul teorema di approssimazione per le funzioni quasi-periodiche

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.2, p. 101–106.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_2_101_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 febbraio 1964

Presiede il Socio anziano M. PICONE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Ancora sul teorema di approssimazione per le funzioni quasi-periodiche* (*). Nota (**) del Corrisp. LUIGI AMERIO.

1. In una recente Nota ⁽¹⁾ ho esteso alle funzioni q. p. a valori in uno spazio X, di Banach, la dimostrazione di Bogoliubov del fondamentale teorema di approssimazione per le funzioni q. p. numeriche. In tale estensione viene modificata la definizione di Bogoliubov delle approssimanti $f_n(t)$ della data funzione q. p. $f(t)$, poiché queste sono espresse mediante un integrale triplo, anziché doppio.

Nella presente Nota (di carattere essenzialmente didattico) mostro come la stessa modificazione consenta di pervenire in modo ulteriormente semplificato al teorema di approssimazione.

2. Siano: J l'intervallo $-\infty < t < +\infty$, J_+ l'intervallo $t > 0$. Posto per $\lambda \in J$, $T \in J_+$,

$$(1) \quad a(\lambda, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

si è dimostrato, in ⁽¹⁾, che se $f(t)$ è q. p. da J a X, la funzione $a(\lambda, T)$, da $J \times J_+$ a X, ha traiettoria relativamente compatta.

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1963-64.

(**) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1964.

(1) L. AMERIO, *Sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi periodiche*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 34, 97-104 (1963).

Ciò premesso, dimostriamo il *teorema di approssimazione*.

Se $f(t)$ è q. p. esiste, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, un polinomio trigonometrico

$$(2) \quad p(t) = \sum_{\mathbf{i}}^q b_{\mathbf{m}} e^{i\lambda_{\mathbf{m}} t} \quad (b_{\mathbf{m}} \in \mathbb{X}, \lambda_{\mathbf{m}} \in \mathbb{J})$$

tale che risulti

$$(3) \quad \sup_{t \in \mathbb{J}} \|f(t) - p(t)\| \leq \varepsilon.$$

Poiché $f(t)$ è q. p., esistono, in corrispondenza del dato $\varepsilon > 0$, due numeri $l > 0$ e δ , con $0 < 2\delta < l$, tali che ogni intervallo di ampiezza l contenga un subintervallo di ampiezza 2δ , tutto costituito da ε -quasi-periodi per $f(t)$.

Definita, in $]-\delta[- \delta[$, una funzione $\varphi(t)$ tale che sia

$$(4) \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt = 4l, \quad \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^2(t) dt < +\infty,$$

prendiamo, in ogni intervallo $kl - (k+1)l$ (con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), un subintervallo $\Delta_k = (t_k - \delta) - (t_k + \delta)$, tutto costituito da ε -quasi-periodi per $f(t)$, e poniamo

$$(5) \quad \omega(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_k) & \text{per } t \in \Delta_k \\ 0 & \text{per } t \notin \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k. \end{cases}$$

Si definisca poi, per $n = 1, 2, \dots$, una funzione $\omega_n(t)$, periodica e di periodo $8nl$, ponendo

$$(6) \quad \omega_n(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{per } |t| < nl \\ 0 & \text{per } nl \leq |t| \leq 4nl. \end{cases}$$

Dalle (4), (5) e (6) segue

$$(7) \quad \omega_n(t) \geq 0,$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{8nl} \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(t) dt &= \frac{1}{8nl} \int_{-nl}^{nl} \omega(t) dt = \frac{1}{8nl} \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{\Delta_k} \varphi(t - t_k) dt = \\ &= \frac{1}{4l} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) dt = 1, \end{aligned}$$

$$(9) \quad \frac{1}{8nl} \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n^2(t) dt = \frac{1}{4l} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^2(t) dt = \rho < +\infty.$$

Consideriamo ora la funzione

$$(10) \quad f_n(t) = \frac{1}{(8nl)^3} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi) d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta) d\eta \int_{-nl}^{nl} \omega(\zeta) f(t + \xi + \eta + \zeta) d\zeta$$

e osserviamo che la condizione $\omega(\xi) \omega(\eta) \omega(\zeta) \neq 0$ implica che ξ, η, ζ siano ε -quasi-periodi, sicché

$$(11) \quad \sup_{t \in J} \|f(t + \xi + \eta + \zeta) - f(t)\| \leq 3\varepsilon.$$

Dalle (7), (8), (10), (11) segue pertanto

$$(12) \quad \|f_n(t) - f(t)\| = \left\| \frac{1}{(8nl)^3} \int_{-nl}^{nl} \omega_n(\xi) d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta) d\eta \int_{-nl}^{nl} \omega(\zeta) (f(t + \xi + \eta + \zeta) - f(t)) d\zeta \right\| \leq 3\varepsilon \quad \forall t \in J.$$

Dimostriamo che risulta

$$(13) \quad f_n(t) = \frac{1}{(8nl)^3} \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\xi) d\xi \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\eta) d\eta \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\tau - t - \xi - \eta) f(\tau) d\tau$$

per $|t| \leq nl$.

Innanzitutto, si osservi che, per

$$(14) \quad |t|, |\xi|, |\eta| \leq nl,$$

si ha

$$(15) \quad \int_{-nl}^{nl} \omega(\zeta) f(t + \xi + \eta + \zeta) d\zeta = \int_{-nl}^{nl} \omega_n(\zeta) f(t + \xi + \eta + \zeta) d\zeta =$$

$$= \int_{-nl+t+\xi+\eta}^{nl+t+\xi+\eta} \omega_n(\tau - t - \xi - \eta) f(\tau) d\tau = \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\tau - t - \xi - \eta) f(\tau) d\tau.$$

È infatti $\omega_n(\zeta) = 0$ per $nl \leq \zeta \leq 7nl$, cioè $\omega_n(\tau - t - \xi - \eta) = 0$ per $nl + t + \xi + \eta \leq \tau \leq 7nl + t + \xi + \eta$, e, se valgono le (14), risulta $nl + t + \xi + \eta \leq 4nl \leq 7nl + t + \xi + \eta$; allo stesso modo si riconosce che è $\omega_n(\tau - t - \xi - \eta) = 0$ per $-4nl \leq \tau \leq -nl + t + \xi + \eta$.

Dalle (10) e (15) segue pertanto

$$f_n(t) = \frac{1}{(8nl)^3} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi) d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta) d\eta \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\tau - t - \xi - \eta) f(\tau) d\tau \quad (|t| \leq nl)$$

e quindi, per la (6), la (13) è dimostrata.

Sviluppiamo ora la funzione periodica $\omega_n(t)$ in serie di Fourier (convergente in media in ogni intervallo limitato):

$$(16) \quad \omega_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k^{(n)} e^{i\nu_k^{(n)} t} \quad \left(\nu_k^{(n)} = \frac{k\pi}{4nl} \right)$$

e osserviamo che (a causa della ortogonalità, in $[-4nl, 4nl]$, del sistema $\{e^{i\nu_k^{(n)} t}\}$) la somma della serie a secondo membro della (16) è indipendente dall'ordine dei termini. Poiché, $\forall n$, è $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \omega_k^{(n)} = 0$, possiamo disporre, $\forall n$, i coefficienti di Fourier $\omega_k^{(n)}$ in ordine di moduli decrescenti, ottenendo una nuova successione

$$\{\vartheta_m^{(n)}\}, \quad \text{con} \quad \vartheta_m^{(n)} = \omega_{k_{m,n}}^{(n)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

per la quale risulterà

$$(17) \quad |\vartheta_1^{(n)}| \geq |\vartheta_2^{(n)}| \geq |\vartheta_3^{(n)}| \geq \dots$$

Posto allora

$$\nu_{k_{m,n}}^{(n)} = -\lambda_m^{(n)},$$

la (16) diventa

$$(18) \quad \omega_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m^{(n)} e^{-i\lambda_m^{(n)} t},$$

la serie essendo convergente in media, come la precedente.

Dalle (9) e (18) segue, per l'eguaglianza di Parseval,

$$(19) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |\vartheta_m^{(n)}|^2 = \rho$$

e inoltre

$$(20) \quad \begin{aligned} \vartheta_m^{(n)} &= \frac{1}{8nl} \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(t) e^{i\lambda_m^{(n)} t} dt = \frac{1}{8nl} \int_{-nl}^{nl} \omega(t) e^{i\lambda_m^{(n)} t} dt = \\ &= \frac{1}{8nl} \sum_{k=-n}^{n-1} e^{i\lambda_m^{(n)} t_k} \int_{\Delta_k} \varphi(t - t_k) e^{i\lambda_m^{(n)} (t - t_k)} dt = \\ &= \frac{1}{8nl} \left(\sum_{k=-n}^{n-1} e^{i\lambda_m^{(n)} t_k} \right) \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) e^{i\lambda_m^{(n)} t} dt. \end{aligned}$$

Ne segue

$$(21) \quad |\vartheta_m^{(n)}| \leq \frac{1}{4l} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) e^{i\lambda_m^{(n)} t} dt \right|$$

e, per la seconda delle (4),

$$(22) \quad |\vartheta_m^{(n)}| \leq 1.$$

Tenuto conto delle (18) e (20), la (13) si scrive:

$$(23) \quad f_n(t) = \frac{1}{(8nl)^3} \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\xi) d\xi \int_{-4nl}^{4nl} \omega_n(\eta) d\eta \int_{-4nl}^{4nl} f(\tau) \sum_m \vartheta_m^{(n)} e^{i\lambda_m^{(n)}(t+\xi+\eta-\tau)} d\tau = \\ = \sum_m (\vartheta_m^{(n)})^3 c_m^{(n)} e^{i\lambda_m^{(n)} t} \quad (|t| \leq nl),$$

ove si è posto, per la (1),

$$(24) \quad c_m^{(n)} = \frac{1}{8nl} \int_{-4nl}^{4nl} f(\tau) e^{-i\lambda_m^{(n)} \tau} d\tau = a(\lambda_m^{(n)}, 4nl).$$

Risulta inoltre

$$(25) \quad \|c_m^{(n)}\| \leq M,$$

essendo, per la quasi-periodicità,

$$\sup_{t \in J} \|f(t)\| = M < +\infty.$$

Dimostriamo che le serie

$$(26) \quad \sum_m |\vartheta_m^{(n)}|^3$$

convergono uniformemente rispetto all'indice $n = 1, 2, \dots$.

Segue infatti dalle (17), (19) e per $p = 1, 2, \dots$

$$p |\vartheta_p^{(n)}|^2 \leq \sum_m |\vartheta_m^{(n)}|^2 \leq \rho,$$

cioè

$$(27) \quad |\vartheta_p^{(n)}|^3 \leq \left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}$$

che prova la tesi.

In virtù della (22) possiamo estrarre una sottosuccessione $\{n_j\} \subseteq \{n\}$ tale che risulti, $\forall m$,

$$(28) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \vartheta_m^{(n_j)} = \vartheta_m,$$

e sarà, per le (17) e (27),

$$(29) \quad |\vartheta_1| \geq |\vartheta_2| \geq |\vartheta_3| \geq \dots,$$

$$(30) \quad |\vartheta_m|^3 \leq \left(\frac{\rho}{m}\right)^{3/2}.$$

Per la (29), se è $\vartheta_m = 0$, è anche $\vartheta_{m+k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Osserviamo inoltre che, se è $\vartheta_m \neq 0$, la successione $\{\lambda_m^{(n_j)}\}$ è necessariamente limitata: $|\lambda_m^{(n_j)}| \leq \gamma_m < +\infty$.

Risulta infatti, per un noto teorema,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

e quindi, se la successione $\{\lambda_m^{(n_j)}\}$ non è limitata, dalla (21) segue $\vartheta_m = 0$.

Siccome a (λ, T) ha traiettoria relativamente compatta, possiamo, in definitiva, estrarre da $\{n_j\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{n_j\}$) in modo che risulti

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_m^{(n_j)} = \lambda_m, \quad \text{se } \vartheta_m \neq 0,$$

e, $\forall m$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_m^{(n_j)} = c_m,$$

avendosi, per la (25),

$$(31) \quad \|c_m\| \leq M.$$

In conclusione, se è $\vartheta_m \neq 0$, risulta, $\forall t \in J$,

$$(32) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} (\vartheta_m^{(n_j)})^3 c_m^{(n_j)} e^{i\lambda_m^{(n_j)} t} = \vartheta_m^3 c_m e^{i\lambda_m t}.$$

È chiaro poi che la (32) vale anche per $\vartheta_m = 0$, prendendo per λ_m un valore arbitrario.

Fissato $t \in J$, supponiamo $n_j l \geq |t|$. Per la (25) e per la convergenza uniforme delle serie (26), segue allora dalle (23) e (32)

$$(33) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_j}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\vartheta_m^{(n_j)})^3 c_m^{(n_j)} e^{i\lambda_m^{(n_j)} t} = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_m^3 c_m e^{i\lambda_m t} = g(t),$$

ove la serie che definisce $g(t)$ converge, per le (30) e (31), uniformemente in J .

Risulta inoltre, per le (12) e (33),

$$(34) \quad \|f(t) - g(t)\| \leq 3\varepsilon \quad \forall t \in J.$$

Possiamo infine determinare, per la convergenza uniforme, un indice q tale che sia

$$\sup_{t \in J} \left\| \sum_{q+1}^{\infty} \vartheta_m^3 c_m e^{i\lambda_m t} \right\| \leq \varepsilon$$

e quindi, per le (33) e (34),

$$\sup_{t \in J} \left\| f(t) - \sum_{i=1}^q \vartheta_m^3 c_m e^{i\lambda_m t} \right\| \leq 4\varepsilon.$$

La (3) (ove si ponga $\vartheta_m^3 c_m = b_m$ e 4ε in luogo di ε) è perciò dimostrata.