Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonello Rubatta

Onde di liquido viscoso in profondità finita

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.1, p. 43–50.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_1_43_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Idrodinamica. — *Onde di liquido viscoso in profondità finita.* Nota di ANTONELLO RUBATTA, presentata [*] dal Corrisp. G. SUPINO.

1. L'azione della viscosità sul moto ondoso di una massa liquida poggiante su fondo orizzontale è stata oggetto di studi già da lungo tempo. Fra i primi risultati sull'argomento sono da ricordare quelli di Basset [1] e di Hough [2] relativi ai modi principali di oscillazione, e lo schema introdotto da Lamb [3] per inquadrare le distribuzioni di velocità presso il fondo. Più recentemente Biesel [4], Carry [5] e Miche [6,7] si sono occupati, con mezzi diversi, dell'attenuazione dell'onda, e Louguet-Higgins [8] infine ha studiato il trasporto di massa.

Non tutti i lavori citati portano a risultati concordanti, inoltre le ricerche si basano spesso su metodi diversi, fondati su ipotesi ed approssimazioni differenti, così che le conclusioni non sono confrontabili facilmente fra loro.

Appare perciò utile raccogliere insieme quanto si può concludere sulle onde progressive di liquido viscoso, inquadrando le considerazioni in uno schema unitario, quale è quello delle onde di piccola ampiezza.

I calcoli che vengono presentati qui si limitano alla prima approssimazione, come verrà meglio precisato in seguito. Viene fornita innanzi tutto l'espressione della funzione di corrente, sotto forma di uno sviluppo in serie nelle potenze semiintere della viscosità cinematica. Tale sviluppo è scritto esplicitamente arrestandosi dapprima al secondo termine, dato che già a questo livello i fatti di rilievo sono sufficientemente delineati. In vista degli affinamenti della teoria, si è messa in evidenza la via da seguire, e non si sono apportate approssimazioni di sorta nei termini conservati. Eventuali approssimazioni vengono eseguite solo sui risultati parziali, ove questi vengono presentati per illustrare l'espressione corretta, e sono comunque sempre sottolineate. Successivamente, attenendosi agli stessi criteri, si cerca un perfezio-

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1964.

(1) A. B. BASSET, *A treatise on hydrodynamics*, 1888.

(2) S. S. HOUGH, *On the influence of viscosity on waves and currents*, « Proc. Lond. Math. Soc. », 1897.

(3) H. LAMB, *Hydrodynamics*, 1906.

(4) F. BIESEL, *Calcul de l'amortissement d'une houle dans un liquide visqueux de profondeur finie*, Houille Blanche, 1949.

(5) C. CARRY, *Calcul de l'amortissement d'une houle dans un liquide visqueux en profondeur finie*, Houille Blanche, 1956.

(6) R. MICHE, *Mouvements ondulatoires de la mer*, « Ann. des Ponts et Chaussées », 1954.

(7) R. MICHE, *Amortissement des houles dans le domaine de l'eau peu profonde*, Houille Blanche, 1956.

(8) M. S. LOUGUET-HIGGINS, *Mass transport in water waves*, « Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. », 1953.

namento dei risultati conseguiti, aggiungendo il terzo termine alla funzione di corrente di prima approssimazione.

2. Il fenomeno in questione è retto dalle equazioni di Navier

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x_0} + v\frac{\partial}{\partial y_0}\right)u = \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_0} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\right)u$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x_0} + v\frac{\partial}{\partial y_0}\right)v = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_0} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\right)v.$$

Ad esse vanno associate le due condizioni dinamiche sul pelo libero $\eta = \eta(x_0, t)$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x_0} + v\frac{\partial}{\partial y_0}\right)p\right|_{y_0=\eta} = 0$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial y_0}\right|_{y_0=\eta} = 0$$

esprimenti rispettivamente il fatto che le particelle del pelo libero sono costantemente soggette alla pressione atmosferica, e che su di esse non agiscono sforzi tangenziali. Vanno unite pure le due condizioni cinematiche sul fondo

$$|u|_{y_0=0} = 0$$

$$|v|_{y_0=0} = 0$$

indicanti l'aderenza del fluido alla parete solida.

La soluzione dei problemi non lineari connessi a questo gruppo di equazioni, viene basata normalmente su un metodo di espansione o di approssimazioni successive, assumendo, una volta eliminata la pressione p, che le incognite u e v siano sviluppabili nella somma illimitata di funzioni parziali aventi moduli con ordini di grandezza via via decrescenti. Il procedimento verrà seguito anche qui, conservando nelle varie scritture i soli primi termini di tali sviluppi, che verranno indicati ancora con u e v.

In prima approssimazione le equazioni indefinite sono dunque

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nu\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) = 0$$

mentre le condizioni ai limiti assumono la forma

per $y_0 = H$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g\frac{\partial v}{\partial x_0} - \nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x_0^2} - \nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial y_0^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial y_0} = 0$$

per $y_0 = 0$
$$u = 0$$

$$v = 0.$$

Data l'incomprimibilità del fluido, la soluzione u, v deriva da una funzione di corrente ψ. Si può porre cioè

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y_o} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x_o}$$

ottenendo naturalmente una notevole semplificazione del problema: l'unica funzione incognita ψ va scelta fra le soluzioni dell'equazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial x_o^2} - \nu\frac{\partial^2}{\partial y_o^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_o^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_o^2}\right)\psi = 0$$

in base alle condizioni ai limiti

per $y_o = H$
$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y_o\,\partial t^2} - g\frac{\partial^2\psi}{\partial x_o^2} - \nu\frac{\partial^4\psi}{\partial x_o^2\,\partial y_o\,\partial t} - \nu\frac{\partial^4\psi}{\partial y_o^3\,\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y_o^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_o^2} = 0$$

per $y_o = 0$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y_o} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_o} = 0.$$

Le condizioni al contorno finora enunciate non sono sufficienti a determinare in modo unico la soluzione, però questa lacuna, come apparirà chiaro dallo sviluppo successivo dei calcoli, può essere colmata in modo molto semplice richiedendo che la ψ si riduca a quella della normale onda irrotazionale progressiva

$$\psi_o = A\,\mathrm{Sh}\, m_o y_o\, e^{-i(m_o x_o - kt)}$$

all'annullarsi della viscosità ν del fluido. In vista di questo, si ricerca dunque una soluzione particolare del tipo

$$\psi = (A\,\mathrm{Sh}\,\alpha y_o + B\,\mathrm{Ch}\,\alpha y_o + C e^{\beta y_o} + D e^{-\beta y_o})\, e^{-i(\alpha x_o - kt)}.$$

Qui α e β devono essere tali da rendere

$$\beta^2 - \alpha^2 - \frac{ik}{\nu} = 0$$

affinché la funzione di corrente adottata soddisfi l'equazione indefinita del moto. Contemporaneamente deve risultare

$$2\alpha^2\beta k + \alpha(\alpha^2 + \beta^2)k\,\mathrm{Sh}\,\alpha H\,\mathrm{Sh}\,\beta H - \beta(\alpha^2 + \beta^2)k\,\mathrm{Ch}\,\alpha H\,\mathrm{Ch}\,\beta H +$$
$$+ i\frac{g\alpha\beta}{\nu}\mathrm{Sh}\,\alpha H\,\mathrm{Ch}\,\beta H - i\frac{g\alpha^2}{\nu}\mathrm{Ch}\,\alpha H\,\mathrm{Sh}\,\beta H = 0$$

perché riesca nullo il determinante del sistema formato dalle quattro condizioni ai limiti

$$A(g\alpha\,\mathrm{Sh}\,\alpha H - k^2\,\mathrm{Ch}\,\alpha H) + B(g\alpha\,\mathrm{Ch}\,\alpha H - k^2\,\mathrm{Sh}\,\alpha H) + Cg\alpha\, e^{\beta H} + Dg\alpha\, e^{-\beta H} = 0$$

$$2A\alpha^2\,\mathrm{Sh}\,\alpha H + 2B\alpha^2\,\mathrm{Ch}\,\alpha H + C(\alpha^2 + \beta^2)e^{\beta H} + D(\alpha^2 + \beta^2)e^{-\beta H} = 0$$

$$A\alpha + C\beta - D\beta = 0$$

$$B + C + D = 0$$

e si possano così assegnare valori non tutti nulli ad A, B, C e D.

Per il calcolo effettivo di α e β conviene ricorrere agli sviluppi formali

$$\alpha = m_0 + m_1 \sqrt{\nu} + \cdots$$

$$\beta = \frac{b_0}{\sqrt{\nu}} + b_1 \sqrt{\nu} + \cdots$$

la cui introduzione porta alle scritture

$$(b_0^2 - ik)\frac{1}{\nu} + (2\, b_0\, b_1 + m_0^2) + \cdots = 0$$

$$\left\{ b_0 \operatorname{Ch} \frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}} (i g m_0 \operatorname{Sh} m_0 H - k b_0^2 \operatorname{Ch} m_0 H) \right\} \frac{1}{\nu\sqrt{\nu}} +$$

$$+ \left\{ m_1\, b_0 \operatorname{Ch} \frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}} (i g m_0 H \operatorname{Ch} m_0 H - k b_0^2 H \operatorname{Sh} m_0 H + ig \operatorname{Sh} m_0 H) + \right.$$

$$+ \operatorname{Sh} \frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}} (i g m_0\, b_0\, b_1 \operatorname{Sh} m_0 H + m_0\, b_0^2 k \operatorname{Sh} m_0 H -$$

$$\left. - i g m_0^2 \operatorname{Ch} m_0 H - b_0^3 b_1\, k H \operatorname{Ch} m_0 H) \right\} \frac{1}{\nu} + \cdots = 0 .$$

Di qui si ottengono nell'ordine i valori

$$b_0 = (1 + i)\sqrt{\frac{k}{2}}$$

$$m_0 = \text{radice reale positiva di } m_0 g \operatorname{Th} m_0 H = k^2$$

$$b_1 = (1 - i)\frac{m_0^2}{4}\sqrt{\frac{2}{k}}$$

$$m_1 = (1 - i)\sqrt{\frac{2}{k}}\; \frac{m_0^2}{2 m_0 H + \operatorname{Sh} 2 m_0 H} \operatorname{Th} \frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}$$

. . . .

Noti così α e β, restano da calcolare i rapporti fra A, B, C e D, valendosi delle quattro condizioni ai limiti. Risulta

$$\frac{B}{A} = -\frac{g i \alpha \operatorname{Sh} \alpha H - \nu(\alpha^2 + \beta^2) k \operatorname{Ch} \alpha H}{g i \alpha \operatorname{Ch} \alpha H - \nu(\alpha^2 + \beta^2) k \operatorname{Sh} \alpha H} = -\sqrt{\nu}\, \frac{m_0}{b_0} \operatorname{Th} \frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}} + \cdots$$

$$\frac{C}{A} = -\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{B}{2A} = -\sqrt{\nu}\, \frac{m_0}{2 b_0}\left(1 - \operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right) + \cdots$$

$$\frac{D}{A} = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{B}{2A} = \sqrt{\nu}\, \frac{m_0}{2 b_0}\left(1 + \operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right) + \cdots$$

La soluzione di prima approssimazione può essere quindi sviluppata in serie e scritta nella forma

$$\psi = A e^{-i[(m_0 + m_1\sqrt{\nu} + \cdots)x_0 - kt]}$$

$$\cdot \left\{ \operatorname{Sh} m_0 y_0 + \sqrt{\nu}\left[\left(m_1 y_0 - \frac{m_0}{b_0}\operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right)\operatorname{Ch} m_0 y_0 - \frac{m_0}{2 b_0}\left(1 - \operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right) e^{\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{m_0}{2 b_0}\left(1 + \operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right) e^{-\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}}\right] + \cdots \right\}.$$

Come richiesto, essa si riduce alla

$$\psi_0 = A \operatorname{Sh} m_0 y_0 \, e^{-i(m_0 x_0 - kt)}$$

quando si annulla la viscosità.

3. Basandosi sulla relazione

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x_0} + v\frac{\partial}{\partial y_0}\right)(y_0 - \eta)\right|_{y_0 = \eta} =$$

$$= -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u(x_0, \eta, t)\frac{\partial \eta}{\partial x_0} + v(x_0, \eta, t) = 0$$

esprimente il fatto che il pelo libero è costantemente formato dalle stesse particelle, si può adesso precisare l'andamento $\eta = \eta(x_0, t)$ del profilo superficiale. Nel grado di approssimazione considerato, tale relazione si riduce alla forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v(x_0, H, t)$$

e fornisce

$$\eta(x_0, t) = H + \frac{A}{k} e^{-i[(m_0 + m_1\sqrt{\nu} + \cdots)x_0 - kt)]}.$$

$$\cdot \left\{ m_0 \operatorname{Sh} m_0 H + \sqrt{\nu}\left[m_1 \operatorname{Sh} m_0 H + m_0\left(m_1 H - \frac{m_0}{b_0}\operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right)\operatorname{Ch} m_0 H - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{m_0^2}{2 b_0}\left(1 - \operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right) e^{\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}} + \frac{m_0^2}{2 b_0}\left(1 + \operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}\right) e^{-\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}}}\right] + \cdots \right\}.$$

Per effetto della viscosità il moto presenta dunque lunghezze d'onda ridotte rispetto a quelle che si osserverebbero in liquido perfetto. Essendo $\operatorname{Th}\frac{b_0 H}{\sqrt{\nu}} \simeq 1$, il numero d'onde vale infatti

$$m = m_0\left(1 + \sqrt{\frac{2\nu}{k}}\,\frac{m_0}{2 m_0 H + \operatorname{Sh} 2 m_0 H} + \cdots\right)$$

anziché m_0. Di conseguenza la velocità di fase si riduce da $V_0 = k/m_0$ al valore

$$V = \frac{k}{m} = \frac{k}{m_0}\left(1 - \sqrt{\frac{2\nu}{k}}\,\frac{m_0}{2 m_0 H + \operatorname{Sh} 2 m_0 H} + \cdots\right).$$

Inoltre, l'onda non si propaga inalterata, ma va attenuandosi secondo la legge

$$e^{-\left(\sqrt{\frac{2\nu}{k}}\frac{m_0^2}{2m_0\mathrm{H}+\mathrm{Sh}\,2m_0\mathrm{H}}+\cdots\right)x_0}$$

in cui si è scritto di nuovo 1 al posto di $\mathrm{Th}\,\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}$.

Si nota ancora che la funzione di corrente ψ dipende dal tempo tramite il fattore e^{ikt}. Così, nell'ambito della prima approssimazione, le traiettorie delle particelle fluide si mantengono chiuse ed il trasporto di massa rimane nullo.

Da ultimo, si osserva che il rotore della velocità vale

$$\omega=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\right)\psi=-\mathrm{A}\,e^{-i[(m_0+m_1\sqrt{\nu}+\cdots)x_0-kt]}\,.$$

$$\cdot\left\{\frac{m_0 b_0}{2\sqrt{\nu}}\left[\left(1-\mathrm{Th}\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}}-\left(1+\mathrm{Th}\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{-\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}}\right]+\cdots\right\}$$

ed assume quindi valori rilevanti in prossimità del fondo, pur risultando insignificante in tutto il resto del corpo d'acqua.

4. A contatto del fondo esiste dunque uno strato d'acqua in cui il moto è fortemente rotazionale, ed in cui le velocità orizzontali si portano con rapidità dal valore nullo di parete ai livelli che competono al corpo d'acqua prinpale. Tale strato limite viene di solito delimitato convenzionalmente in base alla quota sul fondo per la quale la velocità orizzontale assume il primo massimo relativo. Per il calcolo di questo valore $y_0=\delta$ va quindi impiegata la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\left|\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\right|^2=\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial y_0}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y_0^2}+\frac{\partial\psi^*}{\partial y_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial y_0^2}=0.$$

Posto

$$\delta=\delta_1\sqrt{\nu}+\cdots$$

ed eseguite le operazioni indicate risulta che deve essere resa identicamente nulla l'espressione

$$\frac{m_0^2}{2\sqrt{\nu}}\left\{b_0^*\left[-\left(1-\mathrm{Th}\frac{b_0^*\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{b_0^*\delta_1}+\left(1+\mathrm{Th}\frac{b_0^*\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{-b_0^*\delta_1}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Th}\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{b_0\delta_1}-\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Th}\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{-b_0\delta_1}\right]+$$

$$+\,b_0\left[-\left(1-\mathrm{Th}\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{b_0\delta_1}+\left(1+\mathrm{Th}\frac{b_0\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{-b_0\delta_1}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Th}\frac{b_0^*\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{b_0^*\delta_1}-\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Th}\frac{b_0^*\mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)e^{-b_0^*\delta_1}\right]\right\}+\cdots=0.$$

Ne segue che δ_1 è uguale alla prima radice positiva dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il coefficiente di $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$. Si vede così che lo spessore dello strato limite non è legato all'ampiezza dell'onda e si mantiene costante nel corso della propagazione. Esso dipende invece fondamentalmente dal valore di b_0, e presenta delle variazioni irrilevanti con $\frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}$. Trascurando questa dipendenza residua con l'assimilare ad 1 sia $\mathrm{Th}\frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}$ che $\mathrm{Th}\frac{b_0^* \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}$ si ha

$$\cos \delta_1 \sqrt{\frac{k}{2}} + \sin \delta_1 \sqrt{\frac{k}{2}} - e^{-\delta_1 \sqrt{\frac{k}{2}}} = 0$$

che fornisce

$$\delta_1 = 3{,}23 \sqrt{\frac{1}{k}} \,.$$

Lo strato limite ha perciò lo spessore

$$\delta_1 = 3{,}23 \sqrt{\frac{\nu}{k}} + \cdots$$

Si ripresenta dunque il valore deducibile dallo schema di Lamb: il calcolo eseguito qui ne precisa la portata ed il significato.

5. Come accennato all'inizio, volendo migliorare i risultati finora conseguiti, pur rimanendo nel campo della prima approssimazione e conservando quindi le usuali limitazioni sulla ampiezza dell'onda, è necessario aggiungere un ulteriore termine allo sviluppo della funzione di corrente. Riprendendo e proseguendo i calcoli precedenti si ottiene

$$\psi = \mathrm{A}\, e^{-i[(m_0 + m_1\sqrt{\nu} + m_2\nu + \cdots)x_0 - kt]} \cdot \Big\{ \mathrm{Sh}\, m_0 y_0 + \sqrt{\nu} \Big[\Big(m_1 y_0 - \frac{m_0}{b_0} \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) \mathrm{Ch}\, m_0 y_0 -$$

$$- \frac{m_0}{2 b_0} \Big(1 - \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) e^{\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}} + \frac{m_0}{2 b_0} \Big(1 + \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) e^{-\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}} \Big] +$$

$$+ \nu \Big[y_0 m_1 \Big(\frac{m_1 y_0}{2} - \frac{m_0}{b_0} \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) \mathrm{Sh}\, m_0 y_0 + \Big(m_2 y_0 - \frac{m_1}{b_0} \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} -$$

$$- \frac{2 m_0 b_0^2}{g} \mathrm{Ch}\, m_0 \mathrm{H} \sqrt{1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}} - \frac{m_0 b_1 \mathrm{H}}{b_0} \Big(1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) \Big) \mathrm{Ch}\, m_0 y_0 -$$

$$- \Big(\frac{m_0 b_1 y_0}{2 b_0} \Big(1 - \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) + \frac{m_1}{2 b_0} \Big(1 - \mathrm{Th} \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) -$$

$$- \frac{m_0 b_0^2}{g} \mathrm{Ch}\, m_0 \mathrm{H} \sqrt{1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}} - \frac{m_0 b_1 \mathrm{H}}{2 b_0} \Big(1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_0 \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}} \Big) \Big) e^{\frac{b_0 y_0}{\sqrt{\nu}}} -$$

$$-\left(\frac{m_o b_1 y_o}{2 b_o}\left(1 + \mathrm{Th}\frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right) - \frac{m_1}{2 b_o}\left(1 + \mathrm{Th}\frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{m_o b_o^2}{g} \mathrm{Ch}\, m_o \mathrm{H} \sqrt{1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}} - \frac{m_o b_1 \mathrm{H}}{2 b_o}\left(1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\right)\right) e^{-\frac{b_o y_o}{\sqrt{\nu}}}\Bigg] + \cdots \Bigg\},$$

in cui

$$m_2 = -\frac{i}{k}\,\frac{m_o^3}{2 m_o \mathrm{H} + \mathrm{Sh}\, 2 m_o \mathrm{H}}\Bigg\{ m_o \mathrm{H} + 2\,\mathrm{Sh}\, 2 m_o \mathrm{H} -$$

$$- 4\,\mathrm{Sh}\, m_o \mathrm{H}\sqrt{1 - \mathrm{Th}^2 \frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}} + \mathrm{Th}^2 \frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}\Bigg[- m_o \mathrm{H} +$$

$$+ \frac{4}{2 m_o \mathrm{H} + \mathrm{Sh}\, 2 m_o \mathrm{H}} + \frac{4\,\mathrm{Sh}\, 2 m_o \mathrm{H}\, \mathrm{Ch}^2 m_o \mathrm{H}}{(2 m_o \mathrm{H} + \mathrm{Sh}\, 2 m_o \mathrm{H})^2}\Bigg]\Bigg\}.$$

Ove si possa ancora sostituire 1 alla $\mathrm{Th}\,\frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}$, risulta dunque che la lunghezza d'onda e la velocità di fase non vengono ulteriormente modificate, mentre l'attenuazione riesce invece più marcata, giusto l'intervento di un secondo fattore esponenziale avente la forma $e^{-i m_2 x_o} = e^{-|m_2| x_o}$.

E infine, alla formula per lo spessore dello strato limite andrebbe aggiunto il termine $\delta_2 \nu$; ma se si adotta la solita approssimazione sul valore di $\mathrm{Th}\,\frac{b_o \mathrm{H}}{\sqrt{\nu}}$, δ_2 riesce nullo.