Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, A. F. Šestopal

Sul problema di analisi spettrale delle piastre triangolari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.1, p. 37–42.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_1_37_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica razionale. — *Sul problema di analisi spettrale delle piastre triangolari.* Nota di DEMETRIO MANGERON ed A. F. ŠESTOPAL, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Il primo degli Autori, pur avendo in mente la vasta mole di risultati brillanti conseguiti da M. Picone e da M. Nicolescu, concernenti le equazioni poliarmoniche [1], [2] e policaloriche [3], ha studiato vari problemi al contorno spettanti alle equazioni integro-differenziali, lineari o no, che generalizzano le *equazioni polivibranti*, caratterizzate dalla presenza degli operatori di forma [4]

$$(*) \qquad \mathfrak{L}^{(k)} \equiv \left(\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^2 \, \partial x_2^2 \cdots \partial x_m^2} - \frac{\partial^{2m}}{\partial y_1^2 \, \partial y_2^2 \cdots \partial y_m^2} \right)^{(k)},$$

che si riducono per $m = 1$ e $k = 1$ all'operatore caratteristico delle corde vibranti. In questo ordine di idee D. Mangeron, solo oppure in collaborazione con L. E. Krivošein, ha studiato il problema spettrale ed il calcolo effettivo delle funzioni di Green corrispondenti, allorché il secondo degli Autori ha escogitato la capacità di determinazione del metodo di riflessione nei vari problemi di Fisica Matematica [5]–[8].

In ciò che segue si risolve – nel quadro dei problemi di Meccanica tecnica delle vibrazioni ove, come pure in tanti altri domini della Fisica Matematica, ha portato il Suo contributo diventato oramai classico l'Illustre scomparso Accademico Linceo Antonio Signorini (vedasi, ad esempio [9]) – il problema degli autovalori e delle autofunzioni spettante allo studio delle lastre in forma triangolare.

2. Sia, nello spazio euclideo E_n ad n dimensioni, L un operatore differenziale lineare ellittico di ordine $2r$ con coefficienti analitici e sia $\Gamma(P, Q)$ soluzione fondamentale di esso, ove $P(x) \equiv P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ è un punto corrente e $Q(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ – punto sorgente.

Sia $u(P, Q)$ una funzione che soddisfa l'equazione differenziale

$$(1) \qquad L[u] = \delta(P - Q)$$

e verifica tuttavia certe condizioni al contorno su di un iperpiano $H_{n-1}(\vec{x} \cdot \vec{k}) = C$, essendovi $\delta(P - Q)$ l'operatore singolare di Dirac. Si suppone inoltre che gli operatori L_m spettanti alle condizioni al contorno

$$(2) \qquad L_m[u(P, Q)]|_{H_{n-1}} = 0, \qquad (m = 1, 2, \cdots, r)$$

sono lineari, omogenei, ognuno di ordine inferiore a $2r$, mentre il sistema costituito da essi operatori ricopre [10] l'operatore L.

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1964.

Definizione 1. – Si dice che le condizioni (2) spettanti ad H_{n-1} ammettono riflessione se per ogni punto Q si può scrivere

$$u(P, Q) = \Gamma(P, Q) + A\Gamma(P, Q^*), \tag{3}$$

ove A è un operatore lineare, permutabile con gli operatori L e L_m e Q^* è il punto coniugato al punto Q rispetto all'iperpiano H_{n-1}. Si suppone che l'operatore A dipende da P e Q^*. L'operatore A si chiama *operatore effetto delle condizioni al contorno.*

Supponiamo che le condizioni al contorno

$$L_m^1 [u(P, Q)]\big|_{H_{n-1}^1} = 0, \quad L_m^2 [u(P, Q)]\big|_{H_{n-1}^2} = 0, \qquad m = 0(1, 2, \cdots, r) \tag{4}$$

ammettano riflessioni e siano A_1, A_2, rispettivamente, gli operatori effetti corrispondenti.

Definizione 2. – Le condizioni al contorno spettanti agli iperpiani H_{n-1}^1 e H_{n-1}^2 non sono connessi se gli operatori A_1 e A_2 sono permutabili e cioè A_1, A_2 sono, rispettivamente, permutabili con i sistemi di operatori al contorno L_m^2 e L_m^1.

3. Definizioni analoghe a quelle di cui sopra s'introducono nel caso in cui

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{5}$$

è un'equazione lineare d'ordine m rispetto alla variabile t, non appena l'operatore differenziale B è tale che il problema bidimensionale di Cauchy

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \omega_1 \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots, \omega_n \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{6}$$

è ben posto. Ciò risulta dal fatto che l'equazione (5) ammette [11]–[13] soluzione fondamentale di Cauchy, esiste cioè una funzione $E(P, Q, t)$ che soddisfa l'equazione (5) e le condizioni iniziali

$$E\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^\nu E}{\partial t^\nu}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{per } \nu = 1, 2, \cdots, m-2, \\ \delta(P-Q), & \text{per } \nu = m-1. \end{cases} \tag{7}$$

4. Yu. M. Berezanski [14], L. E. Krivošein [15] ed altri ancora, seguendo l'ordine delle idee iniziato dal primo degli Autori concernente la possibilità di formulare problemi al contorno ben posti spettanti agli operatori differenziali non ellittici, hanno studiato recentemente problemi al contorno concernenti vari operatori differenziali non ellittici generalizzati. Donde risulta la validità di scomposizioni di cui più oltre, delle funzioni di Green spettanti agli operatori differenziali lineari a derivate parziali anche non ellittici in serie di soluzioni fondamentali, intendendosi che una funzione $G(P, Q)$ è soluzione fondamentale di un operatore $\mathcal{C}$, se per ogni funzione sufficientemente regolare e finita ha luogo la relazione

$$\mathcal{C}\left[\int_{E_n} G(P, Q) f(Q)\, dQ\right] = f(P). \tag{8}$$

5. Rimandando per ciò che riguarda le dimostrazioni ed i corrispondenti sviluppi algoritmici al « Bollettino dell'Istituto politecnico di Iasi » [16], enunciamo qui sotto per i domini rettangolari il seguente

TEOREMA I. – *Nell'ipotesi dell'esistenza e di unicità del problema al contorno concernente operatore differenziale ellittico*

$$L\,(F\,(P\,,Q)] = \delta\,(P-Q)\,, \tag{9}$$

$$\mathcal{C}_m^i\,[F\,(P\,,Q)]_{x_i=0} = 0 \quad , \quad D_m^i\,[F\,(P,Q)]_{x_i=a_i} = 0\,, \tag{10}$$

$$i = 1\,,2\,,\cdots,n \quad ; \quad m = 1\,,2\,,\cdots,r$$

nel dominio « rettangolare » $R = \{0 \le x_1 \le a_1\,,\cdots,0 \le x_n \le a_n\}$ *e se le condizioni al contorno corrispondenti a tutti gli iperpiani di* $F_r R$ (*frontiera di* R) *non sono connessi, mentre la serie*

$$F\,(P\,,Q) - \Gamma\,(P\,,Q) = \sum_{s_1,s_2,\cdots,s_n=-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} A_{s_j}^j\,B_{s_j}^j\,\Gamma\,(P\,,Q_{s_1,s_2,\cdots,s_n}), \tag{11}$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} A_{s_j}^j &= \prod_{k=1}^{a_{s_j}} A_j\left(P\,,Q_{s_1,s_2,\cdots,s_{j-1},1-2k-\frac{1-(-1)^{s_j}\operatorname{sign} s_j}{2},s_{j+1},\cdots,s_n}\right),\\ B_{s_j}^j &= \prod_{k=1}^{b_{s_j}} B_j\left(P\,,Q_{s_1,s_2,\cdots,s_{j-1},2k-\frac{1-(-1)^{s_j}\operatorname{sign} s_j}{2},s_{j+1},\cdots,s_n}\right),\end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} a_{s_j} &= \frac{1}{2}\left\{|s_j| - \frac{1}{2}\,[1-(-1)^{s_j}]\operatorname{sign} s_j\right\},\\ b_{s_j} &= \frac{1}{2}\left\{|s_j| - \frac{1}{2}\,[1-(-1)^{s_j}]\operatorname{sign} s_j\right\},\\ \operatorname{sign} s_j &= \frac{|s_j|}{s_j} \quad , \quad \operatorname{sign} 0 = 1\end{aligned}\right. \tag{19}$$

e $Q_{s_1,s_2,\cdots,s_n}$ *è il sistema di punti coniugati aventi le coordinate*

$$\xi_j^* = s_j\,a_j + \frac{1}{2}\,[1-(-1)^{s_j}]\,\xi_j\,, \tag{20}$$

A_j *e* B_j *sono rispettivamente operatori effetti corrispondenti alle condizioni di frontiera spettanti agli iperpiani* $x_j = 0$, a_j *è uniformemente convergente nel dominio* R *insieme con tutte le sue derivate sino all'ordine* $2r$ *incluso, la funzione* F (P, Q), *definita tramite* (11), *è la funzione di Gren relativa al « rettangolo »* R.

6. Se il dominio fondamentale è costituito da un triangolo equilatero, determinato ad esempio dalle rette

$$x_2 = 0 \quad , \quad x_2 = x_1\sqrt{3} \quad , \quad x_2 + x_1\sqrt{3} = a\sqrt{3}\,, \tag{21}$$

ha luogo il seguente

TEOREMA 2. - *Nell'ipotesi che le condizioni al contorno concernenti le rette* (21) *ammettono riflessioni con un medesimo operatore effetto* A (P, Q) *e se la serie*

$$\mathrm{F}(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\sum_{s_1,s_2=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{5}\mathrm{A}^{a^i_{s_1 s_2}}\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{Q}^i_{s_1,s_2}), \tag{22}$$

ove si è posto

$$\left\{\begin{aligned} & a^i_{s_1 s_2}=1-\frac{1}{2}\,[1+(-1)^i]\,\mathrm{sign}\,(s_1-s_2)\,(s_2+2\,s_1)\,(2\,s_2+s_1-1)\,,\\ & \mathrm{Q}^i_{s_1,s_2}\left\{\frac{3\,a}{2}(s_1+s_2)+\xi_i\,,\,\frac{a\sqrt{3}}{2}(s_2-s_1)+\eta_i\right\},\ \mathrm{Q}(\xi,\eta),\\ & \xi_5=\xi_0=\xi\,,\ \xi_1=\xi_4=\frac{\eta\sqrt{3}-\xi}{2}\,,\ \xi_2=\xi_3=-\frac{\xi+\eta\sqrt{3}}{2}\,,\\ & \eta_0=-\eta_5=\eta\,,\ \eta_1=-\eta_4=\frac{\xi\sqrt{3}+\eta}{2}\,,\ \eta_2=-\eta_3=\frac{\xi\sqrt{3}-\eta}{2}\,, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

converge uniformemente insieme con tutte le sue derivate sino all'ordine $2r$ *incluso in tutto il triangolo fondamentale salvo il punto* Q, *la funzione* F (P, Q) *è funzione di Green spettante all'operatore ellittico* L.

7. Trascrivendo la formola (22) sotto la forma

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{1}{3}\sum_{s_1,s_2=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{5}\mathrm{A}^{a^i_{s_1 s_2}}\,[\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{Q}^i_{s_1,s_2})+\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{R}^i_{s_1,s_2})+\\ +\Gamma(\mathrm{P}',\mathrm{S}^i_{s_1,s_2})+\Gamma(\mathrm{P}',\mathrm{U}^i_{s_1,s_2})+\Gamma(\mathrm{P}'',\mathrm{V}^i_{s_1,s_2})+\Gamma(\mathrm{P}'',\mathrm{Z}^i_{s_1,s_2})],\end{aligned} \tag{24}$$

ove P, $\mathrm{Q}^i_{s_1,s_2}$, $\mathrm{R}^i_{s_1,s_2}$, P', $\mathrm{S}^i_{s_1,s_2}$, $\mathrm{U}^i_{s_1,s_2}$, P'', $\mathrm{V}^i_{s_1,s_2}$, $\mathrm{Z}^i_{s_1,s_2}$ sono punti aventi le coordinate seguenti

$$\left\{\begin{aligned} & \mathrm{P}(x_1\,,x_2)\,,\ \mathrm{P}'\left(\frac{x_2\sqrt{3}-x_1}{2}\,,\,-\frac{x_1\sqrt{3}+x_2}{2}\right),\ \mathrm{P}''\left(-\frac{x_1+x_2\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{x_1\sqrt{3}-x_2}{2}\right),\\ & \mathrm{Q}^i_{s_1,s_2}(3\,as_1+\xi_i\,,\,a\sqrt{3}\,s_2+\eta_i)\,,\ \mathrm{R}^i_{s_1,s_2}\left(3\,as_1+\frac{3\,a}{2}+\xi_i\,,\,a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\eta_i\right),\\ & \mathrm{S}^i_{s_1,s_2}\left(3\,as_1+\frac{\eta_i\sqrt{3}-\xi_i}{2}\,,\,a\sqrt{3}\,s_2-\frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right),\\ & \mathrm{U}^i_{s_1,s_2}\left(3\,as_1+\frac{3\,a}{2}+\frac{\eta_i\sqrt{3}-\xi_i}{2}\,,\,a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right),\\ & \mathrm{V}^i_{s_1,s_2}\left(3\,as_1-\frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2}\,,\,a\sqrt{3}\,s_2+\frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right),\\ & \mathrm{Z}^i_{s_1,s_2}\left(3\,as_1+\frac{3\,a}{2}-\frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2}\,,\,a\sqrt{3}\,s_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right), \end{aligned}\right. \tag{25}$$

si ottiene, in corrispondenza alla meccanica delle vibrazioni delle piastre triangolari, schematizzata per certi appoggi al contorno del triangolo equilatero nel sistema

$$\nabla^2\nabla^2 w-\lambda^2 w=0\quad,\quad w\Big|_{\mathrm{Fr\,T}}=0\,,\ \frac{d^2 w}{dn^2}\Big|_{\mathrm{Fr\,T}}=0\,, \tag{26}$$

la seguente espressione per la funzione di Green

$$F(P, Q, \lambda^2) = \frac{4}{9\sqrt{3}\, a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos k\pi}{\frac{16 k^4 \pi^4}{9 a^4} - \lambda^2} \psi_k^0(x_1, x_2)\, \psi_k^0(\xi, \eta) + \tag{27}$$

$$+ \frac{8}{9\sqrt{3}\, a^2} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n-k)\pi}{\left(\frac{4 n^2 \pi^2}{9 a^2} + \frac{4 k^2 \pi^2}{3 a^2}\right)^2 - \lambda^2} [\psi_{kn}^c(x_1, x_2)\, \psi_{kn}^c(\xi, \eta) + \psi_{kn}^s(x_1, x_2)\, \psi_{kn}^s(\xi, \eta)],$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} \psi_k^0(x_1, x_2) &= \sin \frac{2k\pi}{a\sqrt{3}} x_2 - \sin \frac{k\pi}{a\sqrt{3}} (x_2 + x_1\sqrt{3}) + \sin \frac{k\pi}{a\sqrt{3}} (x_1\sqrt{3} - x_2); \\ \psi_{kn}^c(x_1, x_2) &= \cos \frac{2n\pi}{3a} x_1 \sin \frac{2k\pi}{a\sqrt{3}} x_2 - \cos \frac{n\pi}{3a} (x_2\sqrt{3} - x_1) \sin \frac{k\pi}{a\sqrt{3}} (x_1\sqrt{3} + x_2) + \\ &\quad + \cos \frac{n\pi}{3a} (x_1 + x_2\sqrt{3}) \sin \frac{k\pi}{a\sqrt{3}} (x_1\sqrt{3} - x_2); \\ \psi_{kn}^s(x_1, x_2) &= \sin \frac{2n\pi}{3a} x_1 \sin \frac{3k\pi}{a\sqrt{3}} x_2 - \sin \frac{n\pi}{3a} (x_2\sqrt{3} - x_1) \sin \frac{k\pi}{a\sqrt{3}} (x_1\sqrt{3} + x_2) - \\ &\quad - \sin \frac{n\pi}{3a} (x_1 + x_2\sqrt{3}) \sin \frac{k\pi}{a\sqrt{3}} (x_1\sqrt{3} - x_2). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Lo spettro è costituito dagli autovalori

$$\lambda_k^2 = \frac{16 k^4 \pi^4}{9 a^4} \quad \text{e} \quad \lambda_{kn}^2 = \left(\frac{4 \pi^2 n^2}{9 a^2} + \frac{4 \pi^2 k^2}{3 a^2}\right)^2, \tag{29}$$

mentre le autofunzioni corrispondenti sono rispettivamente

$$\left\{\begin{aligned} &(1 + \cos k\pi)\, \psi_k^0(x_1, x_2) \quad \text{oppure} \quad [1 + \cos(n-k)\pi]\, \psi_{kn}^c(x_1, x_2) \\ &\text{e} \quad [1 + \cos(n-k)\pi]\, \psi_{kn}^s(x_1, x_2). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

8. Nell'ipotesi che la piastra triangolare ha la forma di una metà del triangolo equilatero, lo spettro è costituito dagli autovalori

$$\nu_{kn}^2 = \left(\frac{4 n^2 \pi^2}{9 a^2} + \frac{4 k^2 \pi^2}{3 a^2}\right)^2, \tag{31}$$

mentre le autofunzioni sono date tramite

$$\left\{\begin{aligned} &[1 + \cos(n-k)\pi]\, [\psi_{kn}^c(x_1, x_2) - \psi_{kn}^c(a - x_1, x_2)], \\ &[1 + \cos(n-k)\pi]\, [\psi_{kn}^s(x_1, x_2) - \psi_{kn}^s(a - x_1, x_2)]. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Osservazioni. – In una delle prossime note esporremo i risultati concernenti l'analisi spettrale spettante ai domini che fanno ricoprire il piano parecchie volte in seguito dell'applicazione del metodo di riflessione.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*. Rondinella, Napoli 1940; *Funzioni iperarmoniche*, « Bull. math. Soc. Roum. Sci. », *38* (1936).

[2] M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris 1936.

[3] M. NICOLESCU, *Équation itérée de la chaleur*, « Studii şi cercetări mat. », *5* (3–4), 243–332 (1954).

[4] D. MANGERON, *Existence and unicity theorem concerned with Dirichlet's problem for a class of non-linear integro-differential equations with partial derivatives*, « Comunic. Acad. R.P.R. », XIII, 12 (1963).

[5] D. MANGERON, *On the Dirichlet's problem concerning equations with total derivatives*, « Bul. Inst. politehn. Iaşi », s.n., *3* (7), 3–4 (1957).

[6] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno non omogenei per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*, « Accad. Naz. dei Lincei, Rend. », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª, XXIII (1–2), 49–54 (1962).

[7] A. F. ŠESTOPAL, *Primenenie metoda otraženii k nekotorym bigarmoničeskim zadačam* (*Applicazione del metodo di riflessione allo studio di certi problemi biarmonici*), « Ukrain. Mat. Ž. », *13*, 1 (1961).

[8] A. F. ŠESTOPAL, *Metod otraženii i ego primenenie k zadačam matematičeskoi fiziki* (*Il metodo di riflessione e le sue applicazioni ai problemi di fisica matematica*), « Bul. Inst. politehn. Iaşi », s.n., *9* (13), 3–4 (1963).

[9] A. SIGNORINI, *Rapport sur mes travaux pendant la guerre*, « Bull. Inst. polytechn. Jassy », *3* (1), 17–28 (1948).

[10] M. SCHECHTER, *General boundary value problems for elliptic partial differential equations*, « Comm. pure and appl. Math. », *12* (3), 457–486; *12* (4), 561–578 (1959).

[11] I. M. GELFAND, G. E. ŠILOV, *Obobščennye funktzii i deistvia nad nimi* (*Funzioni generalizzate e operazioni su di loro*), « GIFML », M. I (1959).

[12] S. BOCHNER, *Lectures on Fourier integrals*. Princeton University Press, N. J. (1959).

[13] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, « Ergebnisse der Math. », N. F., H. 2, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[14] YU M. BEREZANSKI, *O kraevyh zadačah dlea obščih differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh* (*Sui problemi al contorno per gli operatori differenziali generali a derivate parziali*), « Doklady Akad. Nauk SSSR », *122* (6), 959–962 (1958).

[15] L. E. KRIVOŠEIN, *Issledovania po integro-differentzial'nym uravneniam v Kirgizskom universitete* (*Ricerche concernenti equazioni integro-differenziali nell'Università di Kirgizia*), « Materialy 10-i naučnoi konferentzii professorsko-prepodavatel'skogo sostava fiz.-mat. fak. (sektzia mat.) », Frunze 1961, 110 pp.

[16] D. MANGERON, A. F. ŠESTOPAL, *Razloženie funktzii Green'a lineinyh differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh po fundamental'nym funktziam* (*Scomposizione delle funzioni di Green concernenti gli operatori differenziali lineari alle derivate parziali nelle serie di soluzioni fondamentali*), « Bul. Inst. politehn. », Bucureşti, *6* (19663) (in stampa).