
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO SESTINI

Su un problema non lineare del tipo di Stefan

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 518–523.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_518_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Su un problema non lineare del tipo di Stefan.* Nota di GIORGIO SESTINI ^(*), presentata ^(**) dal Socio G. SAN-
SONE.

1. INTRODUZIONE. — In recenti lavori il prof. Quilghini ([1], [2], [3]) ⁽¹⁾ ha affrontato lo studio, per il caso lineare unidimensionale, di problemi analoghi a quello di Stefan nella ipotesi che la temperatura critica di cambiamento di fase T_c anziché costante, come la si considera in tutta la vasta letteratura in argomento (vedasi ad esempio [4]), venga supposta funzione monotona del posto, mostrando in una analisi approfondita la notevole influenza di tale ipotesi sull'andamento stesso delle ricercate soluzioni, esprimenti, come è ben noto, in un dato istante lo stato termico $T(P, t)$ in qualsivoglia punto P di una delle due fasi e, allo stesso istante, l'ascissa $x = h(t)$ caratteristica del fronte di separazione delle due fasi.

In questa Nota mi limiterò a mostrare come i metodi usati per i problemi unidimensionali non lineari analoghi a quello di Stefan ([5], [6]), nell'ipotesi di temperatura critica costante, possono essere impiegati ad assicurare esistenza ed unicità della soluzione degli analoghi problemi nell'ipotesi che tale temperatura sia supposta funzione continua e monotona del posto, derivabile almeno una volta.

2. RICHIAMI E TRASFORMAZIONI. — Con riferimento ad un mezzo materiale semiinfinito, termicamente isotropo, occupante un semispazio, che identificheremo con quello delle $x \geq 0$ di un sistema cartesiano ortogonale, nelle ipotesi già assunte in una mia precedente memoria ([5]), che nel seguito sarà richiamata con la lettera «M», ma limitando lo studio alla sola fase in formazione a partire dal piano $x = 0$ e dall'istante $t = 0$, studieremo l'esistenza e la unicità della soluzione di un problema di Stefan unidimensionale non lineare, nell'ipotesi che la temperatura critica di cambiamento di fase T_c sia funzione della ascissa x del punto considerato, continua monotona e limitata insieme alla sua derivata prima. Un tale problema si traduce in quello analitico di provare l'esistenza di una unica coppia di funzioni $T = T(x, \tau)$ e $h = h(\tau)$, regolare la prima e derivabile almeno una volta la seconda, soddi-

(*) Comunicazione letta il 30 settembre 1963 durante il VII Congresso U.M.I.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

sfacenti al sistema :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] = a(T) \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < h(\tau); \\ \left[K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} = -H(\tau), \quad \tau > 0; \\ T[h(\tau), \tau] = T_c[h(\tau)], \quad h(0) = 0, \tau > 0; \\ \left[K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=h} = c[h, \tau] - m(h) \frac{dh}{d\tau}, \quad \tau > 0. \end{array} \right.$$

Questo sistema è strutturalmente analogo ai soliti sistemi traducenti problemi unidimensionali non lineari del tipo di Stefan ([5], [6]), ma rispetto a quelli, oltre a non essere più $T(h, \tau) = 0$, presenta la notevole diversità che il coefficiente di $\dot{h} = dh/d\tau$, nella condizione che dà l'equilibrio termico attraverso al fronte di separazione tra le fasi, non è più costante. Infatti essendo tale coefficiente dato dal prodotto della densità per il calore latente del mezzo, certamente funzione della temperatura che sul fronte di separazione coincide con quella critica T_c , supposta ora variabile col posto, esso risulta funzione del posto e perciò della incognita h . Il preciso significato fisico delle funzioni $K(T)$, $a(T)$, $H(\tau)$, $m(\xi)$, ci consente la formulazione su di esse di ipotesi, analiticamente restrittive, ma fisicamente accettabilissime se non addirittura indispensabili. Ripetendo alcune delle ipotesi di M, supporremo ancora $0 < K_0 \leq K(T)$, $0 < a_0 \leq a(T)$ limitate per qualsiasi valore di T nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ ed ivi continue con le loro derivate prime; $H(\tau) > 0$ crescente, continua con la sua derivata prima per ogni $\tau > 0$; quanto alla $m(\xi)$ faremo l'ipotesi che essa sia maggiore di una costante positiva m_0 e per qualunque $\xi \geq 0$ limitata e continua insieme alla sua derivata prima. La funzione $c(x, \tau)$ la supporremo infine positiva, continua e tale che sia $c_0 < c(x, \tau) < C$, con c_0 e C costanti.

Senza perdere in generalità supporremo poi che $T_c(0) = 0$.

Col cambiamento di funzione incognita :

$$(2) \quad V(x, \tau) = \int_0^T K(\xi) d\xi,$$

posto :

$$(3) \quad \beta(x) = \int_0^{T_c} K(\xi) d\xi, \quad (4) \quad \beta(h) = V(h, \tau) = \int_0^{T_c(h)} K(\xi) d\xi,$$

$$(5) \quad b(V) = \frac{a(V)}{K(V)},$$

il sistema (1) diventa:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = b(V) \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \tau > 0, 0 < x < h; \\ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x=0} = -H(\tau), \quad \tau > 0; \\ V(h, \tau) = \beta(h), \quad h(0) = 0, \tau > 0; \\ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x=h} = c(h, \tau) - m(h) \dot{h}, \quad \tau > 0. \end{array} \right.$$

Osserveremo che, essendo $T_c(0) = 0$, si ha pure dalla (3):

$$(7) \quad \beta(0) = 0.$$

Dalla (3) si ha anche:

$$\beta'(x) = \frac{d\beta}{dx} = K(T_c) \frac{\partial T_c}{\partial x},$$

con che è $\beta' \geq 0$ secondo che si ha $\frac{dT_c}{dx} \geq 0$.

Per $x = 0$, essendo $T_c = 0$, $-\beta'(0)$ rappresenta il flusso di calore nel senso delle T_c crescenti in $x = 0$. Se perciò è $\left(\frac{dT_c}{dx}\right)_{x=0} \geq 0$ tale flusso, se non è nullo, viene a sommarsi con quello $H(0)$, creato all'istante iniziale in $x = 0$ e non ostacola la formazione della nuova fase. Se al contrario è $\left(\frac{dT_c}{dx}\right)_{x=0} < 0$ il flusso $-\beta'(0)$ si oppone a quello creato per ottenere il cambiamento di fase e perciò se non è $H(0) > |\beta'(0)|$, il fenomeno non può avverarsi. Se pertanto la temperatura critica T_c , supposta monotona, risulta decrescente per $x = 0$, affinché il fenomeno del cambiamento di fase possa avviarsi in $x = 0$ per $t = 0$, occorre formulare sulla assegnata funzione $H(\tau)$ l'ulteriore ipotesi

$$H(0) > -K(0) \left(\frac{dT_c}{dx}\right)_{x=0} = |\beta'(0)|,$$

che, data la crescenza di H , porta alla disuguaglianza:

$$(8) \quad H(\tau) > |\beta'(0)|.$$

Con il nuovo cambiamento di funzione incognita:

$$(9) \quad W = W(x, \tau) = V(x, \tau) - \beta(x),$$

il sistema (6) si trasforma nell'altro:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (W + \beta)}{\partial x^2} - \frac{\partial B}{\partial \tau} = 0, \quad \tau > 0, 0 < x < h; \\ \left[\frac{\partial (W + \beta)}{\partial x} \right]_{x=0} = -H(\tau), \quad \tau > 0; \\ W(h, \tau) = 0, \quad h(0) = 0, \tau > 0; \\ \left[\frac{\partial (W + \beta)}{\partial x} \right]_{x=h} = c(h, \tau) - m(h) \dot{h}, \quad \tau > 0, \end{array} \right.$$

dove

$$(11) \quad B = B(W, x) = \int_0^W b(s + \beta) ds.$$

Osserveremo subito che, essendo $W(h, \tau) = 0$, si ha dalla (11) anche:

$$(12) \quad B[W(h, \tau), h] = B(0, h) = 0.$$

3. L'EQUAZIONE FUNZIONALE TRA LE INCOGNITE DEL PROBLEMA. — Seguendo il procedimento usato in M (vedi anche [6]), integriamo la (10₁) nel dominio $D_{h,t} \equiv \{0 \leq \tau \leq t, 0 \leq x \leq h(t)\}$, applicando la nota formula di Green e tenendo conto di (10₂), (10₃), (10₄) e (12). Si ottiene:

$$\int_0^t m(h) \dot{h}(\tau) d\tau = \int_0^t H(\tau) d\tau + \int_0^t c(h, \tau) d\tau - \int_0^{h(t)} B[W(x, t), x] dx.$$

Con una integrazione per parti al primo membro, si ottiene, tenuto conto delle ipotesi formulate su $m(\xi)$,

$$(13) \quad h(t) = \int_0^t F_1[h(\tau), \tau, h(t)] d\tau - \int_0^{h(t)} F_2[W(x, t), x, h(t)] dx,$$

dove si è posto:

$$(14) \quad \begin{cases} F_1[h(\tau), \tau, h(t)] = \frac{H(\tau) + c(h, \tau) + h(\tau) \dot{h}(\tau)}{m[h(t)]}, \\ F_2[W(x, t), x, h(t)] = \frac{B[W(x, t), x]}{m[h(t)]}. \end{cases}$$

4. I TEOREMI DI ESISTENZA ED UNICITÀ. — Per ogni assegnata funzione $h = h(t)$ continua, monotona e derivabile con $h(0) = 0$, si pensi risolto il *problema ridotto*:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \bar{b}(W + \beta) \frac{\partial W}{\partial \tau} = -\beta''(x), & \tau > 0, 0 < x < h; \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} = -H(\tau) - \beta'(0), & \tau > 0; \\ W(h, \tau) = 0, & h(0) = 0, \tau > 0, \end{cases}$$

essendo $\beta'' = \frac{d^2 \beta}{dx^2}$.

Per le ipotesi formulate sui dati e sulla $h(t)$, classici teoremi ([7]), assicurano l'esistenza di una unica soluzione regolare per questo sistema, che indicheremo con $W_h = W(x, \tau, h)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza

dalla $h = h(t)$, scelta nella classe considerata. Con considerazioni analoghe a quelle del n. 6 di M, si prova la validità delle due disuguaglianze:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} -W_0 \leq \frac{\partial W}{\partial x} \leq 0; \\ 0 \leq W(x, \tau, h) \leq N(h - x); \end{array} \right.$$

dove w_0 ed N sono due costanti positive, indipendenti da h .

Se poi $\alpha(t) > \gamma(t)$ indicano due diverse determinazioni di h e si considerano le due soluzioni W_α e W_γ del problema ridotto, si ha, per $0 \leq x \leq \gamma(t)$, $0 < \tau \leq t$:

$$(17) \quad 0 \leq W_\alpha - W_\gamma \leq \max_{\tau} (\alpha - \gamma).$$

Ci limiteremo ad accennare alla deduzione di (16₂). Per il sistema (15) vale il principio di massimo più volte usato in M. Pertanto essendo in ogni caso $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} < 0$, ammettendo al più l'ipotesi (8), fisicamente necessaria nel caso di temperatura critica monotona decrescente, si ha subito che W_h non può essere negativa in $D_{h,t}$. Per provare la seconda parte della disuguaglianza, basta osservare che $Z = Z(x, h) = -Mx - \beta(x)$ è soluzione del sistema:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = b(Z, x) \frac{\partial Z}{\partial \tau} - \beta''(x), & \tau > 0, 0 < x < h; \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{x=0} = -M - \beta'(0) = -M', & \tau > 0; \\ Z_{x=h} = -Mh - \beta(h), & \tau > 0, \end{array} \right.$$

essendo M una costante positiva maggiore del più grande dei due numeri $|\beta'(0)|$ e $\max H(\tau)$ in $[0, t]$.

Posto $A_h = A(x, \tau, h) = W_h - Z = W_h + Mx + \beta(x)$, tenuto conto di (15) e (18), A_h soddisfa in $D_{h,t}$ il sistema:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A_h}{\partial x^2} = b(A_h, x) \frac{\partial A_h}{\partial \tau}; \\ \left(\frac{\partial A_h}{\partial x}\right)_{x=0} = M - H(\tau) > 0; \\ [A_h]_{x=h} = Mh + \beta(h) > 0, \end{array} \right.$$

con $b(A_h, x) = b(A_h - Mx - \beta, x)$, dal quale, per il solito principio di massimo, discende facilmente la limitazione:

$$A_h = W_h - Z < Mh + \beta(h)$$

e quindi, date le ipotesi su β , come volevamo:

$$0 \leq W_h < N(h - x),$$

essendo $N = M + \max_x \beta'(x)$.

Nelle nostre ipotesi, valendo le (16) e (17), l'esistenza e la unicità della soluzione del nostro problema discende da considerazioni del tutto analoghe a quelle usate da Kyner ([6]), potendosi agevolmente dimostrare che la trasformazione funzionale:

$$(20) \quad g(t) = \int_0^t F_1(h, \tau) d\tau - \int_0^{h(t)} F_2(W_h, x, h) dx = R(h),$$

definita nell'insieme delle funzioni reali, monotone e derivabili nell'intervallo $[0, t]$ e nulle per $t = 0$, ammette uno ed un solo punto unito $\bar{h}$ per il quale, essendo $\bar{h} = R(\bar{h})$, resta soddisfatta la (13). La funzione $h = \bar{h}(t)$ insieme alla soluzione $W_{\bar{h}}$ del problema ridotto (15), dà la ricercata soluzione del sistema (6) e quindi, attraverso alla posizione (9) e per la invertibilità della (2), la ricercata unica soluzione del problema considerato.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. QUILGHINI, *Su un nuovo problema del tipo di Stefan*, « Annali Mat. pura e appl. », (4) LXII, 59-98 (1963).
- [2] D. QUILGHINI, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di un problema del tipo di Stefan*, « Atti Sem. Univ. Modena », 12, 107-120 (1963).
- [3] D. QUILGHINI, *Un teorema di unicità per un problema del tipo di Stefan*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3), 18, 270-278 (1963).
- [4] G. SESTINI, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*, Conferenze Sem. Univ. Bari, 55-56 (1960).
- [5] G. SESTINI, *Sul problema unidimensionale non lineare di Stefan in uno strato piano indefinito*, « Annali Mat. pura e appl. », (4) 51, 203-224 (1960).
- [6] W. T. KYNER, *An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem*, « J. Math. and Mech. », 8, 483-498 (1959).
- [7] M. GEVREY, *Equations aux dérivées partielles du type parabolique*, « J. Math. Pures Appl. » (6), 9, 306-471 (1913).