
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

J. N. DISTEFANO

Ancora sulla stabilità asintotica delle deflezioni di una trave viscoelastica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 504–508.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_504_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Ancora sulla stabilità asintotica delle deflezioni di una trave viscoelastica.* Nota (*) di J. N. DISTÉFANO, presentata dal Socio G. COLONNETTI.

In una Nota precedente [1] abbiamo enunciato la condizione necessaria e sufficiente di stabilità asintotica delle deformazioni laterali di una trave viscoelastica caricata di punta.

L'analisi è stata condotta conservando tutta la generalità della funzione di fluage f nel caso dell'ereditarietà invariabile nel senso di Volterra, cioè quando le proprietà viscosi del materiale dipendono solo dalla differenza $t - \tau$. Allora abbiamo detto che la stabilità asintotica delle deflezioni si raggiunge se, e solo se, il carico di punta P — non importa come la trave sia sollecitata lateralmente — si mantiene al di sotto di $P_k / 1 + E\gamma$, dove P_k è il carico critico nel senso dell'instabilità elastica classica e γ è l'asintota del fluage specifico. Questo risultato è stato dimostrato valido per condizioni di incastro arbitrarie della trave nelle sue estremità, e qualunque sia la variazione del momento d'inerzia lungo l'asse della trave.

Questa conclusione è stata rinforzata e generalizzata poco tempo dopo in un successivo lavoro [2] nel quale si dimostra che la stabilità asintotica di un corpo viscoelastico isotropo, non necessariamente omogeneo, nel caso dell'ereditarietà invariabile, si raggiunge se la sollecitazione del corpo (sistema di forze esterne o di massa e stati di coazione) è minore della sollecitazione critica nel senso dell'instabilità elastica classica, corrispondente allo stesso corpo, ma considerato solamente elastico e caratterizzato dalle costanti elastiche

$$E^* = \frac{E}{1 + E\gamma} \quad ; \quad \nu^* = \nu \frac{1 + E\gamma_2}{1 + E\gamma_1}$$

dove γ_1 e γ_2 sono i valori asintotici del fluage specifico longitudinale e trasversale. Questa condizione generale si riduce ovviamente alla precedente in quanto si considera il caso della trave omogenea.

In ciò che si riferisce ai materiali che hanno invecchiamento, il problema è stato risolto solo per certe funzioni di fluage di tipo particolare. Infatti, in altri due lavori [3], [4] abbiamo dimostrato che quando il fluage è del tipo proposto dall'Aroutiounian [5] per i calcestruzzi, la condizione di stabilità asintotica delle deflezioni laterali di una trave è che il carico di punta si mantenga al di sotto di $P_k / 1 + E\gamma_0$ dove γ_0 è l'asintota del fluage specifico del materiale invecchiato. Simili conclusioni sono state ottenute da Östlund [6] considerando altre leggi proposte per il fluage dei calcestruzzi.

Allora si presenta naturale domandarsi se la condizione di stabilità

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1963.

asintotica già esposta non sia valida qualsiasi sia il tipo di fluage purché lineare ed asintotico. Ed è precisamente questo il punto che si vuole dimostrare in questa Nota.

Abbiamo visto [1] e [3] che lo studio della stabilità asintotica delle deflezioni di una trave viscoelastica si riduce allo studio della stabilità asintotica della funzione $b(t)$ che soddisfa la seguente equazione integrale di seconda specie di Volterra

$$(1) \quad b(t) - \lambda \int_{\tau_0}^t b(\tau) \cdot f(t, \tau) d\tau = g(P, t, \tau_0)$$

dove

$$(2) \quad \lambda = \frac{PE}{P_k - P}$$

$f(t, \tau)$ è la funzione di fluage che è legata al fluage specifico $\bar{\epsilon}_0(t, \tau)$ a mezzo di $f(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\epsilon}_0(t, \tau)$, e $g(P, t, \tau_0)$ è una funzione continua, positiva e superiormente limitata negli intervalli

$$(3) \quad \begin{cases} \tau_0 \leq t \leq \infty \\ 0 \leq P < P_k \end{cases}$$

Consideriamo ora che la funzione fluage specifico $\bar{\epsilon}_0(t, \tau)$ sia ristretta solo dalla condizione di essere continua e monotonamente crescente rispetto di t e monotonamente decrescente rispetto di τ . Per definizione di fluage specifico sarà pure nulla per $t \leq \tau$. Inoltre consideriamo $\bar{\epsilon}_0(t, \tau)$ asintotica per $t, \tau \rightarrow \infty$. In particolare chiameremo con γ_0 il valore asintotico della funzione $\bar{\epsilon}_0(t, \tau)$ definito da

$$(4) \quad \gamma_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}_0(\infty, \tau).$$

Si riconosce subito che γ_0 è il valore assunto dal fluage specifico per un materiale molto invecchiato.

Dopo queste premesse vogliamo dimostrare che se

$$(5) \quad P < \frac{P_k}{1 + E\gamma_0}$$

o ciò che è lo stesso tenendo conto della (2), se

$$(6) \quad \lambda\gamma_0 < 1$$

la funzione $b(t)$ sarà limitata superiormente in tutto intervallo finito o infinito.

Infatti, integrando per parti l'equazione (1) e tenendo conto che $\bar{\epsilon}_0(t, t) = 0$ si può anche scrivere l'equazione (1) nella forma della seguente equazione integrale di prima specie di Volterra

$$(7) \quad \int_{\tau_0}^t [1 - \lambda \bar{\epsilon}_0(t, \tau)] b'(\tau) d\tau = h(P, t, \tau_0)$$

dove

$$(8) \quad h(P, t, \tau_0) = g(P, t, \tau_0) + \lambda b(\tau_0) \bar{\varepsilon}_0(t, \tau_0)$$

che sarà pure una funzione continua, positiva e superiormente limitata negli intervalli (3).

Tenendo conto delle condizioni di continuità e convergenza asintotica imposte alla funzione positiva $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau)$, non è difficile provare che ad ogni istante $t = T$ possiamo fare corrispondere una grandezza $\alpha(T)$ positiva tale che per i valori di t, τ compresi nell'intervallo $T \leq \tau \leq t \leq \infty$ si verifichi

$$(9) \quad \bar{\varepsilon}_0(t, \tau) \leq \gamma_0 + \alpha(T) \quad ; \quad T \leq \tau \leq t \leq \infty$$

e tale che $\lim_{T \rightarrow \infty} \alpha(T) = 0$.

Se $\lambda \gamma_0 < 1$, si può allora fissare convenientemente T in maniera che si verifichi $\lambda [\gamma_0 + \alpha(T)] < 1$. Con ciò la disuguaglianza (9) si può trasformare in

$$(10) \quad 1 - \lambda \bar{\varepsilon}_0(t, \tau) \geq 1 - \lambda [\gamma_0 + \alpha(T)] > 0 \quad ; \quad T \leq \tau \leq t \leq \infty.$$

Ora l'equazione (7) si può anche scrivere

$$h(P, t, \tau_0) - \int_{\tau_0}^T [1 - \lambda \bar{\varepsilon}_0(t, \tau)] b'(\tau) d\tau = \int_T^t [1 - \lambda \bar{\varepsilon}_0(t, \tau)] b'(\tau) d\tau$$

che in combinazione con la disuguaglianza (10)

$$h(P, t, \tau_0) - \int_{\tau_0}^T [1 - \lambda \bar{\varepsilon}_0(t, \tau)] b'(\tau) d\tau \geq [1 - \lambda (\gamma_0 + \alpha)] [b(t) - b(T)]$$

e tenendo conto della (7) si esprime

$$(11) \quad b(t) \leq \frac{h(P, t, \tau_0) - h(P, T, \tau_0)}{1 - \lambda [\gamma_0 + \alpha(T)]} + b(T).$$

Vogliamo adesso dimostrare che la funzione $b(t)$ in un intervallo finito $\tau_0 \leq t \leq T$ è superiormente limitata. Ed infatti, maggiorando progressivamente i successivi nuclei iterati dell'equazione integrale (1) non è difficile calcolare la seguente maggiorante della funzione $b(t)$

$$(12) \quad b(t) \leq g(P, t, \tau_0) + \lambda N e^{\lambda N(t - \tau_0)} \int_{\tau_0}^T g(P, \tau, \tau_0) d\tau$$

dove N è un confine superiore di $f(t, \tau)$.

Ora, la disuguaglianza (10) diventa per $t \rightarrow \infty$

$$b(\infty) \leq \frac{h(P, \infty, \tau_0) - h(P, T, \tau_0)}{1 - \lambda [\gamma_0 + \alpha(T)]} + b(T).$$

Considerando che la funzione $h(P, t, \tau_0)$ è superiormente limitata negli intervalli (3), che $b(T)$ ammette il maggiorante finito (12) e che da (10) si

tiene $1 - \lambda [\gamma_0 + \alpha(T)] < 0$, allora sarà $b(\infty)$ finita, che è ciò che volevamo dimostrare.

Con lo scopo di completare il criterio di stabilità asintotica, vogliamo dimostrare adesso che la condizione (6) è anche condizione di stabilità della velocità di crescimento delle deflezioni laterali della trave. Dalle nostre Note precedenti [1] e [3] è facile inferire che tale stabilità viene condizionata alla stabilità della funzione derivata $b'(t)$.

Lo studio di questa funzione $b'(t)$ sarà fatto usando un risultato ottenuto da Pitt [7] nello studio di certi problemi « Tauberiani » con nuclei non perfetti. Per via di concisione riporteremo solamente i risultati ottenuti.

Infatti, consideriamo l'equazione integrale di prima specie di Volterra (7). Com'è già noto l'integrale è limitata negl'intervalli (3) e più precisamente tende al valore finito $h(P, \infty, \tau_0)$ con $t = \infty$. Ora il teorema di Pitt ci permette di affermare che se posta una funzione $k(t - \tau)$ tale di approssimare alla funzione $\bar{\varepsilon}_0(t, \tau)$; $0 \leq \tau_0 \leq \tau \leq t \leq \infty$, nel senso di essere

$$(13) \quad \int_{\tau_0}^{\infty} |\bar{\varepsilon}_0(t, t - \tau) - k(\tau)| e^{-\sigma\tau} d\tau = 0 \quad ; \quad \sigma \geq 0$$

e se

$$(14) \quad \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-s\tau} [1 - \lambda k(\tau)] d\tau \neq 0 \quad ; \quad s \geq 0$$

allora $b'(t)$ sarà limitata superiormente in tutto intervallo finito o infinito.

Ora, se scegliamo $k(t)$ la funzione fluage specifico del materiale supposto infinitamente invecchiato, cioè $k(t)$ sarà una funzione continua, nulla nell'origine, monotonamente crescente e tendente in forma asintotica verso il valore γ_0 per $t \rightarrow \infty$, è facile dimostrare che - scelta σ opportunamente - la condizione (13) rimarrà identicamente verificata.

In quanto alla condizione (14), d'accordo con la definizione precedente della funzione $k(t)$ si avrà $0 \leq k(t) \leq \gamma_0$ e conseguentemente tenendo conto della condizione (6) si tiene $\lambda k(t) < 1$ ciò che implica che la condizione (14) rimarrà sempre soddisfatta.

Da quanto precede si riconoscono subito che la condizione di stabilità asintotica $\lambda\gamma_0 < 1$ o ciò che è lo stesso $P < P/1 + E\gamma_0$ assume nel presente lavoro una generalità maggiore di quanto ne aveva nei precedenti. Ed infatti, le restrizioni imposte alla funzione fluage specifico (fluage invariabile nel senso di Volterra, o dipendenza del fluage con l'età a mezzo di funzioni particolari) sono state levate, restando il fluage soggetto solo alla condizione di essere asintotico, condizione questa senza la quale ovviamente nessun corpo avrebbe possibilità di stabilizzazione asintotica.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] J. N. DISTÉFANO, *Sulla stabilità in regime visco-elastico a comportamento lineare*. – Nota I. « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. 5, serie VIII, vol. XXVII, nov. 1959.
- [2] J. N. DISTÉFANO, *Sul comportamento asintotico dei corpi viscoelastici nella teoria delle coazioni*, « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », vol. 95 (1960–61).
- [3] J. N. DISTÉFANO, *Sulla stabilità in regime visco-elastico a comportamento lineare*. – Nota II. « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. 6, serie VIII, vol. XXVII, dic. 1959.
- [4] J. N. DISTÉFANO, *Creep deflections in Concrete and Reinforced Concrete Columns*. Publications, 21 st. volume of the International Association for Bridges and Structural Engineering. Zurich 1961.
- [5] N. KH. AROUTIOUNIAN, *Applications de la théorie du fluages*, Ed. Eyrolles, Paris 1957.
- [6] L. ÖSTLUND, *Stabilitet Hos Betongkonstruktioner vid langtidslast*, Nordisk Betong, 1957, pp. 77–87.
- [7] H. R. PITT, *Tauberian Theorems*, Oxford University Press, 1958.