
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

HIROBUMI MIZUNO

Sulle equivalenze e corrispondenze algebriche. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 486–495.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_486_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sulle equivalenze e corrispondenze algebriche.*
Nota II di HIROBUMI MIZUNO, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In questa Nota svilupperemo alcune proprietà dei cicli canonici di una varietà algebrica e stabiliremo varie relazioni nuove fra cicli canonici.

§ 1. — INTRODUZIONE.

Nella teoria delle curve algebriche la nozione centrale è quella dei divisori canonici di una curva algebrica. Quando intercede una corrispondenza algebrica irriducibile fra due curve algebriche, i divisori canonici di queste sono legati da una ben nota relazione, dovuta a Hurwitz.

Severi ha creato e sviluppato, a partire dal 1932, la teoria delle serie di equivalenza e la nozione di serie canonica sulle superficie algebriche [19]. Subito dopo, B. Segre ha generalizzato questa nuova teoria al caso delle varietà 3-dimensionali e ottenuto varie relazioni fra i cicli canonici [38, 39]. Seguendo questi sviluppi, Todd e Eger hanno dato la definizione dei cicli canonici sulle varietà di qualsiasi dimensione e dimostrato la formula di agguinzione generalizzata [43, 44, 34]. D'altra parte, Chern ha poi studiato le classi caratteristiche di una varietà hermitiana, ispirato sia dalla suddetta geometria algebrica classica, sia dalla topologia algebrica svolta in lavori di Stiefel, Whitney, Pontrjagin e altri [32].

Più recentemente, B. Segre ha ripreso la questione da un punto di vista molto generale e ne ha sviluppato la teoria con un metodo formalmente algebrico e concettualmente topologico [40].

Nella precedente Memoria [37] abbiamo trattato le equivalenze razionale e regolare e la questione di classificare le corrispondenze algebriche fra due varietà della stessa dimensione. Ora studieremo alcune proprietà dei cicli canonici delle varietà algebriche. Il § 2 è di carattere preliminare e riassume alcune proposizioni sul prodotto d'intersezione. Nel § 3 rammentiamo definizioni e proprietà dei cicli canonici di una varietà algebrica secondo Todd [43, 44]. Nel § 4 deduciamo varie relazioni fra i cicli canonici relativi ad una varietà algebrica e le sue sottovarietà. Il § 5 è dedicato allo studio dei ricoprimenti con diramazioni. Infine, nel § 6 diamo una generalizzazione della relazione di Hurwitz relativa al ricoprimento (U, φ, V) , riservando il caso più generale a lavori ulteriori.

§ 2. — PRELIMINARI.

In seguito, U, V denotano sempre (salvo che al § 5) varietà algebriche irriducibili non singolari, definite sul campo complesso ed appartenenti ad uno spazio proiettivo.

(*) Nella seduta del 9 novembre 1963.

Siano X, Y due cicli di una varietà U , con rappresentazioni: $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} M_{\alpha}$, $Y = \sum_{\beta} b_{\beta} N_{\beta}$. M_{α}, N_{β} sono sottovarietà di U ; a, b sono interi razionali, fra cui ve n'è soltanto un numero finito diversi da 0. Se per tutte le coppie (α, β) i prodotti $(M_{\alpha}, N_{\beta})_U$ di M_{α} e N_{β} su U sono definiti, allora il prodotto $(X, Y)_U$ è definito dalla formula.

$$(X, Y)_U = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} (M_{\alpha}, N_{\beta})_U.$$

Ma anche se, per alcune coppie (α, β) gli $(M_{\alpha}, N_{\beta})_U$ non sono definiti, è pure sempre possibile scegliere due cicli X', Y' , razionalmente equivalenti ad X, Y rispettivamente, con rappresentazioni: $X' = \sum_{\gamma} a'_{\gamma} M'_{\gamma}$, $Y' = \sum_{\delta} b'_{\delta} N'_{\delta}$, tali che i prodotti $(M'_{\gamma}, N'_{\delta})_U$ siano definiti per tutte le coppie (γ, δ) . (In seguito diremo soltanto «equivalente» per «razionalmente equivalente»; e scriveremo $X \equiv X'$ per dire che « X è equivalente a X' »). In questo caso conveniamo di scrivere $(X, Y)_U \equiv (X', Y')_U$. Scriviamo anche $(X^{[2]})_U \equiv (X, X)_U$. Più generalmente, usiamo la notazione

$$(X^{[i]})_U \equiv (X, X, \dots, X)_U \quad (i \text{ volte}), \text{ ecc.}$$

Sia V una sottovarietà irriducibile di U . Diciamo che un ciclo X di U appartiene a V , se esiste un ciclo X' equivalente su U ad X e tale che tutte le sue componenti siano sottovarietà di V . Per un qualsiasi ciclo X appartenente ad U , il prodotto $(X, V)_U$ appartiene a V . Più generalmente, se V_1, V_2 sono due sottovarietà irriducibili di U tali che il loro prodotto $W = (V_1, V_2)_U$ sia una sottovarietà irriducibile di U , e se X_i è un ciclo appartenente a V_i ($i = 1, 2$), allora il prodotto $(X_1, X_2)_U$ appartiene a W .

PROPOSIZIONE 1. — Sia V una sottovarietà irriducibile di U . Sia C un ciclo di U appartenente a V . Se X è un ciclo appartenente a U , posto per abbreviare $X_V \equiv (X, V)_U$, abbiamo

$$(X, C)_U \equiv (X_V, C)_V.$$

Più generalmente se $X, Y, \dots, Z$ sono cicli appartenenti a U , mettendo

$$X_V \equiv (X, V)_U, Y_V \equiv (Y, V)_U, \dots, Z_V \equiv (Z, V)_U$$

abbiamo

$$(X, Y, \dots, Z, C)_U \equiv (X_V, Y_V, \dots, Z_V, C)_V.$$

Dimostrazione. — Ved. [25], Chap. VII, Th. 18, Cor., [40] Cap. I, n. 5.

PROPOSIZIONE 2. — Sia $\varphi: U \rightarrow V$ un'applicazione razionale olomorfa. Siano X, Y due cicli di V . Supposto che $(X, Y)_V$ sia definito su V e che $\varphi^{-1}[(X, Y)_V]$, $\varphi^{-1}(X)$, $\varphi^{-1}(Y)$ siano definiti, anche $[\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y)]_U$ è definito su U , e abbiamo

$$[\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y)]_U = \varphi^{-1}[(X, Y)_V].$$

Dimostrazione. — Denotiamo con Γ_{φ} il grafico dell'applicazione $\varphi: U \rightarrow V$. È una sottovarietà di $U \times V$. Per definizione

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}[(X, Y)_V] &= \text{pr}_U \{ \Gamma_{\varphi}, [U \times (X, Y)_V] \}_{U \times V} \\ &= \text{pr}_U \{ \Gamma_{\varphi}, (U \times X, U \times Y)_{U \times V} \}_{U \times V}. \end{aligned}$$

Applicando la proposizione 1, risulta

$$\varphi^{-1}[(X, Y)_V] = \text{pr}_U \{ (\Gamma_{\varphi}, U \times X)_{U \times V}, (\Gamma_{\varphi}, U \times Y)_{U \times V} \}_{\Gamma_{\varphi}}.$$

Dato che la φ è definita dappertutto, pr_U è un'applicazione biomorfa fra U e Γ_{φ} e abbiamo

$$\varphi^{-1}[(X, Y)_V] = \{ \text{pr}_U (\Gamma_{\varphi}, U \times X)_{U \times V}, \text{pr}_U (\Gamma_{\varphi}, U \times Y)_{U \times V} \}_U.$$

§ 3. - CICLI CANONICI.

Sia V una varietà algebrica irriducibile non singolare di dimensione n , definita sopra il campo complesso e appartenente ad uno spazio proiettivo. In questo paragrafo riassumiamo, per comodità del lettore, alcune definizioni e proprietà riguardanti i cicli canonici della varietà V .

Consideriamo su V $h + 1$ sistemi lineari ampi ($0 \leq h \leq n - 1$):

$$|C_0|, |C_1|, \dots, |C_h|.$$

Sia F_i un fascio generico estratto da $|C_i|$, ($0 \leq i \leq h$), sicché un elemento generico C_i di F_i è irriducibile e non singolare, per un ben noto teorema di Bertini. Se x è un punto generico di V , esiste uno e un solo C_i di F_i che passi per x . x è un punto semplice di V e lo spazio lineare tangente a V in x , $L_x(V)$ è di dimensione n . x è semplice anche su C_i e lo spazio lineare tangente ad C_i in x , $L_x(C_i)$ è di dimensione $n - 1$ ed è contenuto in $L_x(V)$. Ma, se x non è generico su V , la C_i passante per x può avere un punto multiplo in x . Il nostro primo scopo è di definire il ciclo jacobiano, di dimensione h , a partire da $h + 1$ sistemi lineari $|C_i|$, ($0 \leq i \leq h$). Consideriamo dapprima il caso $h = 0$. Come abbiamo osservato, un elemento generico del fascio $F = F_0$ è non singolare, e l'insieme dei punti multipli degli elementi di F consiste di un numero finito di punti doppi. Il gruppo di questi punti, considerato su V , è, per definizione, il *ciclo jacobiano di dimensione zero su V relativo al fascio F* . Il ciclo jacobiano di dimensione zero dipende dalla scelta del sistema $|C| = |C_0|$ e anche dalla scelta di F entro $|C|$. Ma la classe di equivalenza di questo ciclo dipende solo da $|C|$ e non dipende da F . Denoteremo quindi il ciclo jacobiano di dimensione zero con $J_0(C) = J_0(C_0)$.

Passiamo ora al caso $h > 0$. Se x è un punto generico di V , per ogni i ($0 \leq i \leq h$) esiste uno e un solo C_i di F_i che passi per x , e il punto x è semplice anche sopra C_i . Queste $h + 1$ ipersuperficie C_i ($0 \leq i \leq h$) s'intersecano regolarmente, cioè, designati con $L_x(C_i)$ gli spazi lineari tangenti a C_i in x , la loro intersezione su $L_x(V)$ ha la dimensione

$$(h + 1)(n - 1) - hn = n - h - 1.$$

Il luogo dei punti x di V dove l'intersezione degli spazi lineari tangenti alle C_i passanti per x ha la dimensione maggiore o uguale ad $n - h$, forma una sottovarietà irriducibile di V di dimensione h , chiamata il *ciclo jacobiano di dimensione h su V relativo ai fasci $F_0, F_1, \dots, F_h$* . La sua classe di equivalenza dipende dai sistemi lineari $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_h|$, ma non dipende dalla scelta dei fasci F_i entro $|C_i|$. Denoteremo questo ciclo jacobiano con $J_h(C_0 C_1 \dots C_h)$.

Sia V , al solito, una varietà algebrica irriducibile non singolare di dimensione n , appartenente ad uno spazio proiettivo. Vogliamo associare a V n cicli

$$\Theta_0(V), \Theta_1(V), \dots, \Theta_{n-1}(V)$$

di dimensione rispettivamente $0, 1, \dots, n - 1$, chiamati i cicli canonici di V .

A tale scopo, conviene considerare un operatore lineare κ_h definito sull'insieme di tutti i cicli le cui componenti siano non singolari. Se W è una sottovarietà irriducibile non singolare di V di dimensione m , assumiamo:

- (1) $\kappa_h(W) = \Theta_h(W),$ ($0 \leq h \leq m - 1$).
- (2) $\kappa_m(W) = W,$
- (3) $\kappa_h(W) = 0$ ($h > m$ o $h < 0$).

Se $X = \Sigma c W$ è un ciclo le cui componenti sono tutte non singolari, $\kappa_h(X)$ si definisce per linearità:

$$(4) \quad \kappa_h(X) = \Sigma c \kappa_h(W).$$

$\kappa_h(X)$ è dunque un ciclo puro di dimensione h su V .

Possiamo ora definire il ciclo canonico di dimensione h , $\Theta_h(V)$ di V per induzione rispetto alla dimensione n di V . Se $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_h|$ sono $h+1$ sistemi lineari ampi in mutua posizione generica, e se $J_h(C_0 C_1 \dots C_h)$ è un ciclo jacobiano relativo a questi sistemi lineari, il *ciclo canonico* $\Theta_h(V)$ è, per definizione,

$$(5) \quad \Theta_h(V) \equiv J_h(C_0 C_1 \dots C_h - \kappa_h \left[\prod_{i=0}^h (1 + C_i)^2 - 1 \right]).$$

$\prod_{i=0}^h (1 + C_i)^2 - 1$ è un ciclo di V , le cui componenti sono tutte non singolari e di dimensione inferiore ad n . Si dimostra che questi cicli canonici sono indipendenti dai sistemi $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_h|$ e sono invarianti relativi della varietà V .

Quando n è uguale a 1, (5) diventa, avuto riguardo a (2), (3),

$$(6) \quad \Theta_0(V) \equiv J_0(C) - 2C.$$

Il secondo membro di (6) è un ciclo canonico della curva V nel senso ordinario. Per n qualsiasi ed $h=0$, scrivendo $C=C_0$, la (5) si riduce a

$$\Theta_0(V) \equiv J_0(C) - 2\Theta_0(C) - \Theta_0(C^{[2]}).$$

Se $n=2$, $\Theta_0(C)$ è un ciclo canonico della curva C ; scrivendo C' per denotare una curva aggiunta a C , abbiamo $\Theta_0(C) \equiv (C, C')_V$; osservando ancora (2), si ha $\Theta_0(C^{[2]}) \equiv (C^{[2]})_V$. Quindi

$$\Theta_0(V) \equiv J_0(C) - 2(C, C')_V - (C^{[2]})_V.$$

Il secondo membro è la serie invariante di Severi relativa alla superficie V . Per n qualsiasi ed $h=n-1$, avuto riguardo a (3), la formula (5) ci dà il divisore canonico di V :

$$\Theta_{n-1}(V) \equiv J_{n-1}(C_0 C_1 \dots C_{n-1}) - 2(C_0 + C_1 + \dots + C_{n-1}).$$

V è un altro modo per definire i cicli canonici delle varie dimensioni relativi a V . Sia $|C|$ un sistema lineare ampio di dimensione maggiore o uguale a n . È possibile pensare che $|C|$ consista dalle sezioni di V con iperpiani nello spazio ambiente di V . Sia L un sottosistema di dimensione $h+1$, $0 \leq h \leq n-1$, scelto in modo generico entro $|C|$, sicché la varietà base di L è semplice sopra V e non singolare, irriducibile, o consiste di un numero finito d'intersezioni semplici distinte. Un elemento generico di L è, per un ben noto teorema di Bertini, irriducibile e non singolare. Ma esistono altresì in L elementi singolari; sia, per esempio, $\bar{C}$ un siffatto elemento; $\bar{C}$ è la sezione di V con un iperpiano $\bar{H}$, tangente a V nello spazio ambiente di V , ed i punti singolari di $\bar{C}$ provengono dai punti di contatto di $\bar{H}$ con V .

Se ora $\bar{C}$ si muove entro il sistema L , il luogo dei punti singolari di $\bar{C}$, cioè, il luogo dei punti di contatto d'iperpiani $\bar{H}$ con V è un ciclo di dimensione h sopra V . La classe di equivalenza di questo ciclo è indipendente dalla scelta del sistema L entro C ed è determinato da $|C|$. Chiamiamo questo ciclo il *ciclo jacobiano di dimensione h relativo al sistema $|C|$* e lo designiamo con $J_h(C)$. Si noti che $J_h(C)$ è diverso, salvo il caso $h=0$, dal ciclo jacobiano di dimensione h , $J_h(C_0 C_1 \dots C_h)$ relativo ad $h+1$ sistemi $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_h|$.

Ora poniamo

$$(7) \quad \Theta_h(V) \equiv J_h(C) - \sum_{i=0}^{h+2} \binom{h+2}{i} \Theta_h(C^{[i]}).$$

Si può dimostrare che il ciclo $\Theta_h(V)$ così definito, è identico a quello dato dalla formula (5), a meno di equivalenza.

Formula di aggiunzione. - Sia C un'ipersuperficie irriducibile su V . Se K e $K(C)$ sono divisori canonici di V e di C , sussiste la relazione di aggiunzione:

$$(8) \quad (C, C + K)_V \equiv K(C).$$

Questa formula si generalizza nel modo seguente. Siano $\Theta_h(V)$, $\Theta_h(C)$ i cicli canonici di dimensione h relativi a V ed a C sopra introdotti. Il ciclo $A_h(C) \equiv \Theta_h(C) + \Theta_h(V)$ si chiama il ciclo di dimensione h aggiunto al sistema $|C|$. Analogamente a (8), sussiste la relazione

$$(9) \quad (C, A_h(C))_V \equiv (C, \Theta_h(C) + \Theta_h(V))_V \equiv \Theta_{h-1}(C).$$

Per $h = n - 1$, (9) si riduce a (8). La formula (9) si chiama la *formula di aggiunzione generalizzata*.

§ 4. - RELAZIONI FRA CICLI CANONICI.

TEOREMA 1. - *Su di una varietà algebrica V , irriducibile non singolare e di dimensione n , sia*

$$(1) \quad V = V_0, V_1, \dots, V_n,$$

una successione di sottovarietà non singolari soddisfacenti alla condizione che V_α sia di dimensione $n - \alpha$, irriducibile per $\alpha < n$ e costituita da un numero finito di punti distinti per $\alpha = n$, e che $V_{\alpha+1}$ sia contenuta in V_α . Designando con $\Theta_h(V_\alpha)$ il ciclo canonico h -dimensionale relativo a V_α , sussiste allora la relazione:

$$(2) \quad \Theta_{h-i}(V_i) \equiv [\Theta_h(V), V_i]_V + \sum_{\alpha=0}^{i-1} [\Theta_{h-\alpha}(V_{\alpha+1}), V_i]_{V_\alpha}, \quad 1 \leq i \leq h \leq n-1.$$

Dimostrazione. - Applichiamo la formula di aggiunzione generalizzata (9), § 3, a due varietà successive $V_\alpha, V_{\alpha+1}$ di (1):

$$(3) \quad [\Theta_{h-\alpha}(V_\alpha) + \Theta_{h-\alpha}(V_{\alpha+1}), V_{\alpha+1}]_{V_\alpha} \equiv \Theta_{h-\alpha-1}(V_{\alpha+1}), \quad 0 \leq \alpha \leq h \leq n-1.$$

Facciamo il prodotto di questa relazione con V_i su $V_{\alpha+1}$, $0 \leq \alpha \leq h \leq i \leq n$. $V_{\alpha+1}$ essendo una sottovarietà di V_α , possiamo applicare la Proposizione 1 (§ 2) ottenendo:

$$[\Theta_{h-\alpha}(V_\alpha) + \Theta_{h-\alpha}(V_{\alpha+1}), V_i]_{V_\alpha} \equiv [\Theta_{h-\alpha-1}(V_{\alpha+1}), V_i]_{V_{\alpha+1}}.$$

Sommando questa relazione a membro a membro rispetto ad α da zero fino a $i-1$, si ricava appunto la (2). c. d. d.

Sia C un'ipersuperficie di V , irriducibile e non singolare, tale che anche le $C^{[\alpha]}$ siano irriducibili e non singolari per $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ e che $C^{[n]}$ consista di un numero finito di punti distinti di V . La successione $V, C, C^{[2]}, \dots, C^{[n]}$ soddisfa alla condizione imposta alla successione (1). Applicando la (3) e ricordando ancora la Proposizione 1, otteniamo:

$$(4) \quad \Theta_{h-i}(C^{[i]}) \equiv [\Theta_h(V), C^{[i]}]_V + \sum_{\alpha=0}^{i-1} [\Theta_{h-\alpha}(C^{[\alpha+1]}), C^{[i-\alpha]}]_V.$$

In particolare, mettendo $C = \Theta = \Theta_{n-1}(V)$, $h = n - 1$, abbiamo

$$(5) \quad \Theta_{n-1}(\Theta^{[i-1]}) \equiv i \Theta^{[i]}.$$

Per $i = n$ risulta

$$(6) \quad \Theta_0(\Theta^{[n-1]}) \equiv n \Theta^{[n]}.$$

Il caso $n = 3$ è noto come la *formula di Pannelli*. Da (5) si ottiene:

$$\Theta_{n-i}(\Theta_{n-i+1}(\dots \Theta_{n-2}(\Theta_{n-1}(V)) \dots)) \equiv i! \Theta^{[i]}.$$

Con l'uso delle formule ora stabilite, possiamo scrivere esplicitamente varie relazioni fra cicli canonici di V per $n = 2, 3, 4, \dots$. Per semplificare le notazioni, scriviamo Θ_h in luogo di $\Theta_h(V)$.

Il caso $n = 2$:

$$\Theta_0(\Theta_1) \equiv 2(\Theta_1^{[2]})_V.$$

Questa è la relazione di Noether-Enriques-Castelnuovo.

Il caso $n = 3$:

$$\Theta_0(\Theta_2) \equiv (\Theta_1 \Theta_2)_V + 2(\Theta_2^{[3]})_V,$$

$$\Theta_0(\Theta_1) \equiv (\Theta_1^{[2]})_{\Theta_2} + 2(\Theta_1 \Theta_2)_V,$$

$$\Theta_1(\Theta_2) \equiv 2(\Theta_2^{[2]})_V,$$

$$\Theta_0(\Theta_3^{[2]}) \equiv 3(\Theta_2^{[3]})_V.$$

La prima e la terza relazione sono dovute a B. Segre (ved. [38], formule (82), (58), (50)).

Il caso $n = 4$:

$$\Theta_0(\Theta_3) \equiv (\Theta_1 \Theta_3)_V + (\Theta_2 \Theta_3^{[2]})_V + 2(\Theta_3^{[4]})_V,$$

$$\Theta_1(\Theta_3) \equiv (\Theta_2 \Theta_3)_V + 2(\Theta_3^{[3]})_V,$$

$$\Theta_2(\Theta_3) \equiv 2(\Theta_3^{[2]})_V,$$

$$\Theta_0(\Theta_2) \equiv (\Theta_3^{[3]})_{\Theta_3} + 3(\Theta_2^{[2]})_V + (\Theta_2 \Theta_3^{[2]})_V,$$

$$\Theta_1(\Theta_2) \equiv (\Theta_2^{[2]})_{\Theta_3} + 2(\Theta_2 \Theta_3)_V,$$

$$\Theta_0(\Theta_1) \equiv (\Theta_1^{[2]})_{\Theta_2} + (\Theta_1 \Theta_2)_{\Theta_3} + 2(\Theta_1 \Theta_3)_V.$$

§ 5. - RICOPRIMENTI DIRAMATI.

In questo §, U e V non sono necessariamente varietà algebriche. Più in generale, supponiamo che U, V siano due spazi localmente compatti e che φ sia un'applicazione continua di U in V . φ si chiama *propria*, se l'immagine inversa di ogni compatto di V per φ è un compatto in U . Un sottoinsieme chiuso D di uno spazio V localmente connesso si chiama *non decomponente* in V , se per ogni insieme aperto ll non vuoto e connesso $ll - D \cap ll$ è sempre non vuoto e connesso.

Supponiamo ora che U e V siano connessi e localmente connessi, φ sia un'applicazione propria di U su V . Diciamo che la terna (U, φ, V) è un *ricoprimento* di V con s fogli, se esiste in V un sottoinsieme E non decomponibile in V , soddisfacente alle condizioni: 1) l'insieme $\varphi^{-1}(E)$ è non decomponibile in U ; 2) l'applicazione φ è localmente omeomorfa in $U - \varphi^{-1}(E)$; 3) per ogni punto V di $V - E$, $\varphi^{-1}(v)$ consiste precisamente di s punti distinti di $U - \varphi^{-1}(E)$; 4) per ogni punto v di E , $\varphi^{-1}(v)$ consista da un numero finito di punti di U al più. Diciamo che un punto $u \in U$ sta sopra $v \in V$, se $v = \varphi(u)$. Un punto di U dove φ non è localmente omeomorfa, si chiama *punto di diramazione* di (U, φ, V) . L'applicazione φ si chiama anche la *proiezione*.

I punti di diramazione rispetto al ricoprimento (U, φ, V) sono contenuti in $\varphi^{-1}(E)$. Sia D l'insieme dei punti di diramazione rispetto al ricoprimento (U, φ, V) . $\varphi(D)$ è contenuto in E . Se esso non coincide con E , possiamo sostituire E con $\varphi(D)$; supponiamo dunque che E sia un sottoinsieme minimo soddisfacente alle condizioni 1)-4). Sia $\bar{u} \in U$ un punto di diramazione rispetto al ricoprimento (U, φ, V) . Sia ll un aperto connesso di U contenente $\bar{u}$ ed abbastanza piccolo, tale che ll non contenga nessun punto $\bar{u}$ con $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{u})$ distinto da $\bar{u}$. È possibile prendere un tale ll , perché sopra $\varphi(\bar{u})$ esiste un numero finito di punti al più. Se, per ogni tale aperto ll e per ogni punto $u \in ll - D \cap ll$ con $\varphi(u) = v$, esistono α punti $u', u'', \dots, u^{(\alpha)}$ distinti fra loro e distinti da u , e giacenti sopra il punto $v = \varphi(u)$: $\varphi(u') = \varphi(u'') = \dots = \varphi(u^{(\alpha)}) = v$, il punto $\bar{u}$ si chiamerà un *punto di diramazione di grado* (o d'ordine) α rispetto al ricoprimento (U, φ, V) . L'insieme dei punti di U che sono di diramazione di grado α almeno, sarà designato con D_α . Esso è un sottoinsieme chiuso di U . Sussiste ovviamente la relazione:

$$U \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_s.$$

Siano ora U, V varietà analitiche complesse di dimensione (complessa) n , (U, φ, V) denoti un ricoprimento e sia la proiezione $\varphi: U \rightarrow V$ olomorfa. L'insieme D_α dei punti di diramazione di grado almeno α rispetto al ricoprimento (U, φ, V) è, in questo caso, una sottovarietà analitica complessa di U . D_α si chiama la *varietà di diramazione di grado α* rispetto al ricoprimento (U, φ, V) . Eventualmente può accadere che

$$D_i = D_{i+1} = \dots = D_j \quad (1 \leq i < j \leq s) \quad \text{o} \quad D_i = D_{i+1} = \dots = \emptyset,$$

Se D_1 è vuoto (e quindi anche tutti i D_α sono vuoti), (U, φ, V) si chiamerà un ricoprimento *non diramato*.

§ 6. - LA DIRAMAZIONE ED I CICLI CANONICI.

Ritorniamo di nuovo alle varietà algebriche U, V , irriducibili e non singolari. Vogliamo stabilire il seguente:

TEOREMA 2. - *Siano date due varietà U, V , algebriche, irriducibili, non singolari e della stessa dimensione n , tali che U ricopra V con s fogli; suppo-*

niamo che la varietà di diramazione di grado α rispetto al ricoprimento (U, φ, V) sia una sottovarietà D_α di U di dimensione $n - \alpha$, irriducibile e non singolare per $\alpha < n$, e che D_n consti di un numero finito di punti distinti. Denotando con $\Theta_h(W)$ il ciclo canonico di dimensione h relativo alla varietà W , sussiste la relazione:

$$(1) \quad \varphi^{-1}[\Theta_h(V)] \equiv \Theta_h(U) + \sum_{\alpha=1}^{n-h} (-1)^\alpha \Theta_h(D_\alpha).$$

Proiettando questa relazione sopra V , si ottiene:

$$(2) \quad \varphi[\Theta_h(U)] \equiv s \Theta_h(V) - \sum_{\alpha=1}^{n-h} (-1)^\alpha \Theta_h[\varphi(D_\alpha)].$$

Allo scopo di dimostrare il teorema, premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. — Sia D_α la varietà di diramazione di grado α rispetto al ricoprimento (U, φ, V) . Se B è un'ipersuperficie irriducibile non singolare di U , in posizione generica relativamente alle $D = D_1, D_2, \dots, D_s$ in U , $(B, D_\alpha)_U$ è la varietà di diramazione di grado α rispetto al ricoprimento (B, φ', C) dove $\varphi' = \varphi|_B$, e C è l'immagine di B secondo φ .

Dimostrazione. — Sia $\bar{u} \in B$ un punto di diramazione rispetto al ricoprimento (U, φ, V) . Preso un aperto ll contenente $\bar{u}$ e non contenente nessun punto $\bar{u}$ distinto da $\bar{u}$ con $\varphi(\bar{u}) = \varphi(\bar{u})$, se per ogni punto $u \in ll - D \cap ll$ esistono α punti $u', u'', \dots, u^{(\alpha)}$ distinti fra loro e distinti da u tali che $\varphi(u') = \varphi(u'') = \dots = \varphi(u^{(\alpha)}) = \varphi(u)$ anche per ogni punto di $ll \cap B - D \cap ll \cap B$ sussiste la stessa relazione, onde la conclusione voluta. c. d. d.

LEMMA 2. — Se due cicli X, Y sopra una varietà algebrica V segano cicli equivalenti sopra un elemento generico di un sistema lineare ampio, X, Y sono essi stessi equivalenti su V .

A conoscenza di chi scrive questa proposizione non è stata dimostrata nella letteratura, salvo nel caso in cui X, Y siano dei divisori di V . Per ora dobbiamo ammetterla come congettura.

Dimostrazione del teorema. — Sia $|C|$ un sistema lineare ampio sopra V , tale che anche il sistema $|B| = \varphi^{-1}(|C|)$ sopra U sia ampio. Un qualsiasi elemento B generico di $|B|$ è irriducibile e non singolare. Dimostriamo il teorema per induzione rispetto alla dimensione n delle varietà U, V . Se $n = 1$, cioè se U, V sono curve algebriche, le formule (1), (2) si riducono a

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}[\Theta_0(V)] &\equiv \Theta_0(U) - D, \\ \varphi[\Theta_0(U)] &\equiv s \Theta_0(V) + \varphi(D), \end{aligned}$$

ben note relazioni di Hurwitz (cfr. per esempio [32 a], Th. 2, Chap. VI, § 2).

Supponiamo ora $n > 1$ e che il teorema sia già stabilito per la dimensione $n - 1$. Avuto riguardo al lemma 1, abbiamo

$$(3) \quad \varphi^{-1}[\Theta_h(C)] \equiv \Theta_h(B) + \sum_{\alpha=1}^{n-1-h} (-1)^\alpha \Theta_h(BD_\alpha).$$

Sommando (1) e (3) a membro a membro, facendo il prodotto con B su U e ricordando la formula di aggiunzione generalizzata, il primo membro diventa:

$$(4) \quad \{\varphi^{-1}[\Theta_h(C)] + \varphi^{-1}[\Theta_h(V)], B\}_U \equiv \varphi^{-1}[\Theta_{h-1}(C)],$$

dove abbiamo applicato la proposizione 2, § 2. Analogamente, il secondo membro si riduce a

$$(5) \quad \Theta_{h-1}(B) + \sum_{\alpha=1}^{n-h} (-1)^\alpha \Theta_{h-1}(BD_\alpha),$$

ove si noti che $\Theta_h(BD_{n-h}) \equiv 0$, cfr. (3), § 3. Per l'ipotesi di induzione, le (3), (4) e (5) sono equivalenti, eppertanto, in virtù del lemma 2, il primo membro ed il secondo della somma di (1) e (3) sono equivalenti fra loro. Sottraendo a membro a membro la parte equivalente, si ottiene la (1). c. d. d.

COROLLARIO. – Sia $\chi(W)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré della varietà W . Sotto le condizioni del Teorema I, abbiamo:

$$(6) \quad \chi(U) = s\chi(V) + \sum_{\alpha=1}^n \chi(E_\alpha), \quad E_\alpha = \varphi(D_\alpha).$$

Dimostrazione. – Sia $\Theta_0(W)$ un ciclo canonico di dimensione 0 rispetto alla varietà W . Il grado, cioè il numero dei punti del ciclo $\Theta_0(W)$ è uguale a $(-1)^m \chi(W)$, m essendo la dimensione di W (cfr. [40], pp. 104, 115). La proiezione $\varphi: U \rightarrow V$ non cambia il grado di un ciclo di dimensione zero su U : $\text{grad } \Theta_0(U) = \text{grad } \varphi[\Theta_h(U)]$. Prendendo il grado di due membri della (2), $h = 0$:

$$\varphi[\Theta_0(U)] \equiv s\Theta_0(V) - \sum_{\alpha=1}^n (-1)^\alpha \Theta_0(E_\alpha);$$

e poiché $\text{grad } \Theta_0(E_\alpha) = (-1)^{n-\alpha} \chi(E_\alpha)$, si ottiene la (3). c. d. d.

BIBLIOGRAFIA.

(Seguito di quella data in [37].)

- [31] J. W. ALEXANDER, *Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (5), 23, 55-62 (1914).
- [32] S. S. CHERN, *Characteristic classes of Hermitian manifolds*, « Annals of Math. », 47, 85-121 (1946).
- [32 a] C. CHEVALLEY, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, « Amer. Math. Soc. Math. Surveys », 6, New York 1951.
- [33] A. COMESSATTI, *Sulla serie canonica d'una superficie algebrica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (6), 16, 555-560 (1932).
- [34] F. EGER, *Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Thèse), « Ann. Ec. Norm. Sup. » (3), 60, 143-172 (1943).

- [35] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
- [36] W. V. D. HODGE, *The characteristic classes on algebraic varieties*, « Proc. London Math. Soc. » (3), 1, 138-151 (1951).
- [37] H. MIZUNO, *Sulle equivalenze e corrispondenze algebriche*, I, « Rend. di Mat. » (3-4), 20, 338-354 (1961).
- [38] B. SEGRE, *Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche*, « Mem. Acc. d'Italia », 5, 479-576 (1934).
- [39] B. SEGRE, *Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une V_n algébrique*, « Mem. Acc. Roy. Belgique » (2), 14, 3-39 (1936).
- [40] B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. » (4), 33, 1-128 (1953).
- [41] C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, « Atti Acc. Sc. Torino », 31, 485-501 (1896).
- [42] K. STEIN, *Analytische Zerlegungen Complexer Räume*, « Math. Annalen », 132, 63-93 (1956).
- [43] J. A. TODD, *The geometrical invariants of algebraic loci*, « Proc. London Math. Soc. » (2), 43, 127-138 (1937).
- [44] J. A. TODD-E. A. MAXWELL, *Note on the invariants of the canonical systems of an algebraic variety*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 33, 438-443 (1937).