ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE TALLINI

Un'applicazione delle Geometrie di Galois a questioni di Statistica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 479–485.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_479_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Un'applicazione delle Geometrie di Galois a questioni di Statistica* (*). Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Sia γ_q un campo di Galois d'ordine q ($q = p^h$, p primo), [7] chap. 12. Denoteremo con $M_q^{(r,k)}$ ($k \geq r$, $r \geq 3$) una matrice di tipo $r \times k$, ad elementi in γ_q , avente diversi da zero tutti i determinanti d'ordine r ed $r - 1$ da essa estraibili. Proveremo nel n. 1 (Prop. II) che, se $q \geq 3$, siffatte matrici esistono (per particolari valori di k), non esistono se $q = 2$. Supporremo perciò in seguito, salvo contrario avviso, $q \geq 3$. Data la finitezza di γ_q , l'insieme degli interi k per ciascuno dei quali esista una matrice $M_q^{(r,k)}$, ammette un massimo, che denoteremo con $m_{r,q}$.

In alcune questioni di statistica, riguardanti gli esperimenti fattoriali (cfr. per esempio [1]), ha interesse determinare la funzione $m_{r,q}$. A tale problema, posto da K. Sarkadi, è stata data una risposta parziale da A. Lee in [2] provando che risulta $m_{q-1,q} < q$.

Nel presente lavoro risponderemo completamente alla questione nei casi seguenti: per $q - 1 \leq r$ (cfr. (2) n. 1, che contiene, per $r = q - 1$, il risultato citato di A. Lee), per $r = 3$ e q qualsiasi (cfr. Prop. III, n. 2) e nel caso in cui sia $r > 3$ e q , dispari, grande rispetto ad r (cfr. Prop. VI, n. 3). Stabiliremo inoltre delle limitazioni per $m_{r,q}$, qualunque sia r e q (cfr. Prop. V, n. 3) e determineremo tutte le possibili matrici $M_q^{(r,m_{r,q})}$, per q dispari grande rispetto ad r (cfr. Prop. IV n. 2, Prop. VII n. 3).

Nello stabilire quanto esposto, faremo uso di argomentazioni geometriche, poggianti sulla nozione di k -arco e su risultati ad essi relativi ottenuti da B. Segre e dalla sua scuola.

1. Denoteremo con $S_{r-1,q}$ ($r \geq 3$) uno spazio lineare $(r - 1)$ -dimensionale costruito su γ_q ($q \geq 2$), [7] chap. 17. In $S_{r-1,q}$ definiscesi k -arco [4], un insieme di k ($\geq r$) punti ad r ad r indipendenti. Diremo che *ad un k -arco è associabile un r -simpleso*, $\mathfrak{S}$, se, aggregando singolarmente ciascun vertice di $\mathfrak{S}$ al k -arco, si ottiene un $(k + 1)$ -arco.

Se ad un k -arco è associabile l' r -simpleso fondamentale $O_1(1, 0, \dots, 0)$, $O_2(0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $O_r(0, 0, \dots, 1)$, la matrice di tipo $r \times k$, che ha per colonne le coordinate dei punti del k -arco (presi con un dato ordine e in ciascuno dei quali è fissato il fattore di proporzionalità insito nelle coordinate), ha evidentemente diversi da zero tutti i determinanti d'ordine r e d'ordine $r - 1$, e cioè è una matrice $M_q^{(r,k)}$. Viceversa, data una matrice $M_q^{(r,k)}$, i

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

punti di $S_{r-1,q}$ che hanno come coordinate le colonne di $M_q^{(r,k)}$ costituiscono manifestamente un k -arco a cui è associabile l' r -simpleso fondamentale. Si ha dunque che:

PROP. I. - Ogni k -arco di $S_{r-1,q}$ a cui sia associabile un r -simpleso, determina una matrice $M_q^{(r,k)}$ (o una ad essa equivalente ⁽¹⁾): quella che ha per colonne le coordinate dei punti del k -arco (presi con un dato ordine e in ciascuno dei quali sia fissato il fattore di proporzionalità insito nelle coordinate), in uno dei riferimenti che ha come r -simpleso fondamentale l' r -simpleso associabile. Viceversa, una matrice $M_q^{(r,k)}$ determina in $S_{r-1,q}$ un k -arco a cui è associabile l' r -simpleso fondamentale.

Ci proponiamo di mostrare che:

PROP. II. - Non esistono matrici $M_q^{(r,r)}$, se $q = 2$; ne esistono, se $q \geq 3$.

Supposta esistente una matrice $M_2^{(r,r)}$, essa determinerebbe in $S_{r-1,2}$ un r -arco $\mathfrak{S}_1$, a cui sarebbe associabile un r -simpleso, $\mathfrak{S}_2$ (cfr. Prop. I). In uno dei riferimenti di $S_{r-1,2}$ che ha come vertici del simpleso fondamentale i punti di $\mathfrak{S}_1$, i vertici di $\mathfrak{S}_2$ avrebbero evidentemente coordinate tutte diverse da zero, e ciò è assurdo in quanto è unico il punto di $S_{r-1,2}$ avente coordinate tutte diverse da zero.

Supponiamo $q \geq 3$ e sia a un elemento di γ_q , con $a \neq 0, 1$. In $S_{r-1,q}$ si considerino gli r punti $U_1(1, 1, \dots, 1)$, $U_2(1, a, 1, \dots, 1)$, $\dots$, $U_r(1, 1, \dots, a)$. Essi sono indipendenti, il determinante delle loro coordinate valendo, come si prova facilmente, $(a-1)^{r-1} \neq 0$, e quindi costituiscono un r -simpleso, $\mathfrak{S}_2$, di $S_{r-1,q}$. Se si aggrega il punto U_i dell'arco, $\mathfrak{S}_1$, costituito dai vertici dell' r -simpleso fondamentale, si ottiene evidentemente un $(r+1)$ -arco. L' r -simpleso $\mathfrak{S}_2$ è quindi associabile all'arco $\mathfrak{S}_1$; dunque quest'ultimo determina una matrice $M_q^{(r,r)}$ (cfr. Prop. I).

Supporremo in seguito sempre $q \geq 3$. Dalla Prop. II, testè dimostrata si ha:

$$(1) \quad m_{r,q} \geq r.$$

Stabiliremo ora che:

$$(2) \quad m_{r,q} = r, \quad \text{se } q - 1 \leq r,$$

$$(3) \quad m_{r,q} \geq r + 1, \quad \text{se } r < q - 1.$$

Le (2) e (3) saranno provate (anche in forza della (1)), se dimostriamo che non esistono matrici $M_q^{(r,r+1)}$, se $q - 1 \leq r$, e che ne esistono, se $r < q - 1$.

Supposta esistente una matrice $M_q^{(r,r+1)}$, con $q - 1 \leq r$, essa determina in $S_{r-1,q}$ un $(r+1)$ -arco, $\mathfrak{A}$, cui è associabile un r -simpleso, $\mathfrak{S}$ (cfr. Prop. I). Scelto in $S_{r-1,q}$ il punto unitario e i vertici del simpleso fondamentale coincidenti con i punti di $\mathfrak{A}$; i vertici di $\mathfrak{S}$, in tale riferimento, dovranno avere coordinate tutte diverse da zero e tra loro (se infatti un vertice, V , di $\mathfrak{S}$ avesse

(1) Diremo equivalenti due matrici di tipo $r \times k$, ad elementi in un qualsiasi campo, se l'una si ottiene dall'altra moltiplicando ciascuna linea (riga o colonna) per un fattore di proporzionalità non nullo e scambiando tra loro le righe, o le colonne.

la coordinata j -esima nulla, o le coordinate s -ma e t -ma (con $s \neq t$) uguali, esso dovrebbe appartenere all'iperpiano $x_j = 0$, oppure all'iperpiano $x_s = x_t$ ma tali iperpiani contengono r punti di $\mathfrak{A}$ e quindi, in ogni caso, aggregando V ad $\mathfrak{A}$ non si avrebbe un $(r+2)$ -arco, cioè $\mathfrak{S}$ non sarebbe associabile ad $\mathfrak{A}$.

D'altra parte in $S_{r-1,q}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ un punto avente le coordinate tutte diverse da zero e tra loro, se $r > q-1$, manifestamente non esiste; se $r = q-1$ ha per coordinate una permutazione degli elementi non nulli del campo γ_q , e quindi soddisfa all'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 0$ (è noto infatti, [7] p. 70, che la somma degli elementi di un campo finito è nulla). Dunque, in ogni caso, per $r \geq q-1$, non esistono r punti *indipendenti* (cioè costituenti un r -simpleso) aventi coordinate tutte diverse tra loro e da zero. Se ne deduce che ad $\mathfrak{A}$ non è associabile nessun r -simpleso, e ciò è contro il supposto. Ne segue la (2) anche in forza della (1).

Supponiamo $r < q-1$. Siano $a, a_1, \dots, a_r, r+1$ elementi di γ_q diversi tra loro e dallo zero (certo esistenti, essendo $r+1 \leq q-1$). In $S_{r-1,q}$ si considerino gli r punti $A_1(a_1, a_2, \dots, a_r), A_2(a_1, a, a_3, \dots, a_r), \dots, A_r(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a)$. Essi sono indipendenti, il determinante delle loro coordinate valendo, come si prova facilmente, $a_1(a-a_2) \dots (a-a_r) \neq 0$, e quindi costituiscono un r -simpleso $\mathfrak{S}$. Se si aggrega il punto A_i all' $(r+1)$ -arco $\mathfrak{A}$, costituito dai vertici dell' r -simpleso fondamentale e dal punto unitario, si ottiene un $(r+2)$ -arco (infatti il punto A_i ($i = 1, 2, \dots, r$), avendo diverse da zero e tra loro tutte le coordinate, non appartiene a nessuno degli iperpiani $x_j = 0$ e $x_s = x_t$, $s \neq t$, cioè a nessuno degli iperpiani che congiungono $r-1$ punti, presi comunque, di $\mathfrak{A}$). Quindi l' r -simpleso $\mathfrak{S}$ è associabile all' $(r+1)$ -arco $\mathfrak{A}$. Dunque $\mathfrak{A}$ determina una matrice $M_q^{(r,r+1)}$ (cfr. Prop. I), onde la (3).

Nello studio della funzione $m_{r,q}$, in forza della (2), potremo supporre in seguito $q \geq r+2$.

2. Ci proponiamo in questo numero di determinare la funzione $m_{3,q}$, per $q \geq 5$, e tutte le matrici $M_q^{(3,m_{3,q})}$, per q dispari ≥ 110 .

Siano $\mathfrak{C}$ una conica ⁽²⁾ non degenera di $S_{2,q}$ e A_1, A_2, A_3 tre suoi punti. I $q-2$ punti di $\mathfrak{C}$, diversi da A_1, A_2, A_3 , costituiscono un $(q-2)$ -arco, cui evidentemente è associabile il triangolo A_1, A_2, A_3 . Tale $(q-2)$ -arco determina allora una matrice $M_q^{(3,q-2)}$ (cfr. Prop. I n. 1); onde è $m_{3,q} \geq q-2$. Se q è pari, aggregando ai $q-2$ punti di $\mathfrak{C}$ diversi da A_1, A_2, A_3 il nucleo ⁽²⁾ di $\mathfrak{C}$, si ottiene un $(q-1)$ -arco cui è associabile il triangolo A_1, A_2, A_3 , e quindi una matrice $M_q^{(3,q-1)}$; onde è $m_{3,q} \geq q-1$. Si ha allora (anche in forza della (3) del n. 1), che:

$$(4) \quad q-1 \leq m_{3,q} \quad (q \text{ pari}, q > 4),$$

$$(4') \quad \text{Max}(4, q-2) \leq m_{3,q} \quad (q \text{ dispari}, q \geq 5).$$

(2) È noto che in un $S_{2,q}$ i punti di una conica non degenera costituiscono un $(q+1)$ -arco, e che, se q è pari, le tangenti alla conica passano tutte per un punto, detto nucleo della conica; talché, aggregando tale punto a quelli della conica, si ottiene un $(q+2)$ -arco, [7] p. 266, [5], p. 100.

Dimostriamo ora la:

PROP. III. - *Se q è pari, risulta:*

$$(5) \quad m_{3,q} = q - 1 \quad (q > 4);$$

se q è dispari, risulta:

$$(6) \quad m_{3,5} = 4 \quad ; \quad m_{3,q} = q - 2 \quad (q \geq 7).$$

Cominciamo a provare che non esistono matrici $M_q^{(3,q)}$, qualunque sia $q \geq 5$.

Supposta esistente una $M_q^{(3,q)}$, essa determina in $S_{2,q}$ un q -arco, $\mathcal{A}$, cui è associabile un triangolo $A_1 A_2 A_3$ (cfr. Prop. I). Aggregando dunque al q -arco il punto A_i ($i = 1, 2, 3$) si ottiene un $(q+1)$ -arco, $\mathcal{C}_i$. D'altra parte, se q è dispari, ogni $(q+1)$ -arco di $S_{2,q}$ è dato dai punti di una conica, [7] n. 74; dunque i $(q+1)$ -archi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ determinano tre coniche, le quali, avendo $q \geq 5$ punti in comune, debbono coincidere. Ne segue che A_1, A_2, A_3 coincidono, e ciò è assurdo. Se q (≥ 4) è pari, ogni q -arco ed ogni $(q+1)$ -arco di $S_{2,q}$ è contenuto in uno ed un sol $(q+2)$ -arco (cfr. [7] n. 181, teor. 5, ove si ponga $t = 1, 2$; [8]). Quindi i tre $(q+1)$ -archi $\mathcal{C}_i$, avendo il q -arco $\mathcal{A}$ in comune, debbono essere contenuti nel $(q+2)$ -arco, $\mathcal{C}$, determinato da $\mathcal{A}$. Ne segue che dei tre punti A_1, A_2, A_3 , due coincidono, e ciò è assurdo.

Dalla non esistenza di matrici $M_q^{(3,q)}$ ($q \geq 5$), ora provata, segue $m_{3,q} < q$, e quindi (in forza della (4)) la (5), e (in forza della (4')) la prima delle (6). Resta da provare la seconda delle (6); all'uopo basta dimostrare che non esistono matrici $M_q^{(3,q-1)}$, per q dispari e ≥ 7 . Supposta esistente una tale matrice, ad essa corrisponde in $S_{2,q}$ un $(q-1)$ -arco, $\mathcal{A}$, cui è associabile un triangolo $A_1 A_2 A_3$. Sia $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) il q -arco che si ottiene aggregando A_i ad $\mathcal{A}$. È noto che ogni q -arco, se q è dispari e ≥ 5 , è contenuto in una ed una sola conica, [7] n. 175. Sia $\mathcal{C}_i$ quella che contiene $\mathcal{A}_i$. Le coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, avendo $q-1 \geq 6$ punti in comune, coincidono in una conica $\mathcal{C}$. La $\mathcal{C}$ deve dunque contenere i $q-1$ punti di $\mathcal{A}$ ed i tre punti A_1, A_2, A_3 , e cioè $q+2$ punti distinti; ma ciò è assurdo (i punti di una conica essendo in numero di $q+1$). Rimane così pienamente provata la Prop. III.

Dimostriamo ora la:

PROP. IV. - *Se q è dispari e ≥ 110 , ogni $(q-2)$ -arco $\mathcal{A}$ di $S_{2,q}$ cui sia associabile un triangolo $A_1 A_2 A_3$, è dato dai punti, diversi da A_1, A_2, A_3 , di una conica (non degenera) passante per A_1, A_2, A_3 .*

Sia $\mathcal{A}_i$ il $(q-1)$ -arco che si ottiene aggregando il punto A_i al dato $(q-2)$ -arco, $\mathcal{A}$. È noto che ogni $(q-1)$ -arco di $S_{2,q}$, se q è dispari e ≥ 110 , è contenuto in una ed una sola conica (cfr. [7] n. 181, teor. 6, ove si ponga $t = 3$). Sia $\mathcal{C}_i$ quella che contiene $\mathcal{A}_i$. Le coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, avendo $q-2$ (≥ 108) punti in comune, coincidono in una conica $\mathcal{C}$. La $\mathcal{C}$ è dunque costituita dai $q-2$ punti di $\mathcal{A}$ e dai punti A_1, A_2, A_3 . Onde l'asserto.

In forza della Prop. I del n. 1, e della Prop. IV, ora dimostrata, si è in grado di costruire una qualsiasi matrice $M_q^{(3,q-2)}$, per q dispari e ≥ 110 .

3. Ci proponiamo in questo numero di studiare la funzione $m_{r,q}$, per $r \geq 4, q \geq r + 2$.

Cominciamo a dimostrare la:

PROP. V. - *Se q è pari, risulta:*

$$(7) \quad \text{Max}(r + 1, q - r + 1) \leq m_{r,q} \leq q + r - 2 \quad (r \geq 4, q \geq r + 2);$$

se q è dispari, risulta:

$$(8) \quad \text{Max}(r + 1, q - r + 1) \leq m_{r,q} \leq q + r - 5 \quad (r \geq 4, q \geq r + 2).$$

In $S_{r-1,q}$ ($r \geq 4$) una curva razionale normale è data da un insieme di $q + 1$ punti, costituenti un $(q + 1)$ -arco, [4]. Fissati r punti su essa, i $q - r + 1$ punti rimanenti formano evidentemente un $(q - r + 1)$ -arco cui è associabile l' r -simplesso che ha per vertici gli r punti fissati. Dunque esistono matrici $M_q^{(r, q-r+1)}$ (cfr. Prop. I), onde $m_{r,q} \geq q - r + 1$. Rimangono così provate, anche in forza della (3) del n. 1, le limitazioni inferiori che figurano nelle (7) e (8). Data una matrice $M_q^{(r, m_{r,q})}$ ($r \geq 4, q \geq r + 2$), essa determina in $S_{r-1,q}$ un $(m_{r,q})$ -arco cui è associabile un r -simplesso (cfr. Prop. I, n. 1); aggregando dunque all' $(m_{r,q})$ -arco un vertice dell' r -simplesso, si ottiene un $(m_{r,q} + 1)$ -arco. D'altra parte è noto che [6] n. 18, [4] n. 20, per ogni k -arco di $S_{r-1,q}$ risulta $k \leq q + r - 1$, se q è pari; $k \leq q + r - 4$, se q è dispari e $q > r \geq 5$. Dunque dovrà essere $m_{r,q} \leq q + r - 2$, se q è pari; $m_{r,q} \leq q + r - 5$, se q è dispari e $q > r \geq 5$. Risultano così provate la (7) in ogni caso, e la (8), per $r \geq 5$. Resta soltanto da dimostrare che è $m_{4,q} \leq q - 1$, per $q \geq 6$, e cioè che non esistono matrici $M_q^{(4,q)}$, per $q \geq 6$. Supposta esistente una tale matrice, ad essa corrisponde in $S_{3,q}$ un q -arco $\mathcal{C}$, cui è associabile un 4-simplesso $A_1 A_2 A_3 A_4$. Sia $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, 3$) il $(q + 1)$ -arco che si ottiene aggregando A_i ad $\mathcal{C}$.

È noto che, se q è dispari, ogni $(q + 1)$ -arco di $S_{3,q}$ è dato dai punti di una cubica gobba [4]; dunque i $(q + 1)$ -archi $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) determinano quattro cubiche gobbe, le quali, avendo $q \geq 6$ punti in comune, coincidono; ne consegue che A_1, A_2, A_3, A_4 coincidono, e ciò è assurdo, onde l'asserto.

Dimostriamo ora la:

PROP. VI. - *Se q è dispari e*

$$(9) \quad q \geq 64(r - 2)^2 + 2(r - 2) - 37,$$

risulta:

$$(10) \quad m_{r,q} = q - r + 1.$$

Possiamo supporre $r \geq 4$, perché per $r = 3$ la precedente proposizione è contenuta nella Prop. III, del n. 2. Poiché, per la (9), è $q - r + 1 \geq r + 1$, dalla (8) si ha $m_{r,q} \geq q - r + 1$. Per dimostrare la Prop. VI basta dunque provare che, se vale la (9), non esistono matrici $M_q^{(r, q-r+2)}$.

Supposto esistente una tale matrice, siano $\mathcal{A}$ il $(q - r + 2)$ -arco che ad essa corrisponde in $S_{r-1,q}$, ed $A_1 A_2 \cdots A_r$ l' r -simplesso associabile ad $\mathcal{A}$, talché, aggregando ad $\mathcal{A}$ il punto A_i si ottiene un $(q - r + 3)$ -arco, $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, \dots, r$).

Fissati $r - 2$ punti su $\mathcal{A}_i$ (certo esistenti in virtù della (9)), scegliamo ad arbitrio tra essi $r - 3$ punti; e sia S_{r-4} lo spazio che li congiunge. Proiettando dall' S_{r-4} il $(q - r + 3)$ -arco $\mathcal{A}_i$ su di un piano, sghembo con l' S_{r-4} , si ottiene - come è facile provare - un $(q - 2r + 6)$ -arco di tale piano. Ma un k -arco, con $k = q - 2r + 6 = q - 2(r - 2) + 2$, di un $S_{2,q}$, con q dispari e soddisfacente alla (9), è sempre contenuto in una (e una sola) conica (cfr. [7], n. 181, teor. 6, ove ivi si ponga $t = 2(r - 2)$). Il suddetto $(q - 2r + 6)$ -arco è quindi contenuto in una conica e quindi il cono che proietta dall' S_{r-4} l'arco $\mathcal{A}_i$ è un cono quadrico. In corrispondenza alle varie possibili scelte di $r - 3$ fra gli $r - 2$ punti fissati su $\mathcal{A}_i$, si ottengono $r - 2$ coni quadrici. Questi si segano lungo l' S_{r-3} congiungente gli $r - 2$ punti fissati e secondo una curva razionale normale, $\mathcal{C}_i$, contenente ciascuno degli $r - 2$ punti fissati (cfr. [4] n. 4, e si ponga ivi $r - 1$ al posto di r). Dunque il $(q - r + 3)$ -arco $\mathcal{A}_i$ è contenuto nella $\mathcal{C}_i$.

Le r curve razionali normali $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) contengono $\mathcal{A}$ e cioè hanno $q - r + 2 > r + 2$ punti in comune; esse quindi coincidono (cfr. [4] n. 4 e si ponga ivi $r - 1$ al posto di r) con una curva razionale normale, $\mathcal{C}$. La $\mathcal{C}$ contiene dunque i $q - r + 2$ punti di $\mathcal{A}$ e gli r punti $A_1, \dots, A_r$, cioè $q + 2$ punti distinti. Ma ciò è assurdo (i punti di una curva razionale normale essendo in tutto $q + 1$). L'assurdo prova l'asserto.

Dimostriamo infine la:

PROP. VII. - *Se q è dispari, e*

$$(11) \quad q \geq 16(2r - 3)^2 + (2r - 3) - 37,$$

ogni $(q - r + 1)$ -arco $\mathcal{A}$ di $S_{r-1,q}$ cui sia associabile un r -simplesso $A_1 A_2 \cdots A_r$ è dato dai punti, diversi da $A_1, A_2, \dots, A_r$, di una curva razionale normale passante per $A_1, A_2, \dots, A_r$.

Sia $\mathcal{A}_i$ il $(q - r + 2)$ -arco che si ottiene aggregando il punto A_i al dato $(q - r + 1)$ -arco.

Con argomentazione analoga a quella svolta nel quintultimo capoverso, si prova che, in virtù della (11), $\mathcal{A}_i$ è contenuto in una curva razionale normale $\mathcal{C}_i$.

Le r curve $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) contengono $\mathcal{A}$ e cioè hanno $q - r + 1 > r + 2$ punti in comune, esse quindi coincidono (cfr. [4], n. 4) con una curva razionale normale $\mathcal{C}$, la quale è dunque costituita dai punti $A_1, A_2, \dots, A_r$ e dai punti del $(q - r + 1)$ -arco $\mathcal{A}$. Ne consegue l'asserto.

In forza della Prop. I del n. 1 e della Prop. VII, ora dimostrata, si è in grado di costruire una qualsiasi matrice $M_q^{(r, q-r+1)}$, per q dispari e soddisfacente alla (11).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. BÁNKÖVI, K. SARKADI, *5/9-es Frakcionális faktoriális kísérlet terve*, « Publ. Math. Inst. Hungarian Ac. Sci. », vol. VII, ser. B fasc. 4, 509–536 (1963).
- [2] A. LEE, *Über einige extremalaufgaben bezüglich endlicher Körper*, « Acta Math. Ac. Sci. Hungaricae », tom. XIII, fasc. 3–4, 235–243 (1962).
- [3] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Zanichelli, Bologna 1948.
- [4] B. SEGRE, *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti*, « Ann. di Mat. » (4), 39, 357–379 (1955).
- [5] B. SEGRE, *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul », ser. A, 21, 97–123 (1956).
- [6] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (4), 48, 1–97 (1959).
- [7] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.
- [8] G. TALLINI, *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $p = 2$* , « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 23, 242–245 (1957).