
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ALEXANDRE FRODA

Sur l'irrationalité du nombre 2^e

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 472–478.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_472_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teorie dei numeri. — *Sur l'irrationalité du nombre 2^e .* Nota di ALEXANDRE FRODA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Dans cette Note on s'est proposé de prouver ⁽¹⁾ l'irrationalité de 2^e à l'aide du critère paramétrique C_1 de [1].

Soit, par définition,

$$S = \{1, 2, \dots, r, r+1, \dots\}$$

la suite croissante des nombres naturels.

En désignant la base des logarithmes naturels par

$$e = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}, \quad (s \in S),$$

on définit

$$(1) \quad \alpha = 2^{e-1}.$$

En vue d'appliquer à ce nombre α le critère C_1 , on pose

$$(2) \quad y_r = 2^{e_r}, \quad x_r = 1, \quad e_r = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!}, \quad (r, s \in S)$$

et, en conservant les notations de [1],

$$(3) \quad \alpha_r = \frac{y_r}{x_r}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r = \alpha, \quad (r \in S).$$

On choisit une suite de paramètres q_r , définis pour tout r sous la forme

$$(4) \quad q_r = \frac{2^{e_r}}{r}, \quad (r \in S).$$

En vertu de (2)-(4), on pourra écrire

$$(5) \quad \frac{y_r}{q_r} = r, \quad \frac{x_r}{q_r} = \frac{r}{2^{e_r}}, \quad (r \in S).$$

Le critère C_1 d'irrationalité est constitué en [1] par la paire des conditions A_1, B_1 , rappelées plus loin et qui - satisfaites à la fois - impliquent l'irrationalité de α , limite de la suite croissante des α_r (3), comme il a été prouvé dans le travail précédent [1] ⁽²⁾.

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) L'irrationalité de 2^e est explicitement présumée en [2], § 4.2, mais la décision à ce sujet est considérée, faute d'une démonstration valide, comme une question encore ouverte.

(2) On voit aisément que les conditions générales (4), (6) de [1], qui y sont exigées pour la validité de C_1 , sont remplies dans le cas présent. En effet, pour $r \rightarrow \infty$, on déduit de (4), qu'on a $q_r \rightarrow 0$ en décroissant et comme en (2) on a $x_r = 1$, le rapport $\frac{x_r}{q_r} \rightarrow \infty$ en croissant, tandis qu'on en tire aussi $\frac{q_{r+1}}{q_r} < \frac{x_{r+1}}{x_r} = 1$, ($r \in S$).

On a supposé en [1] que les nombres α_r , dont la suite définit α , sont rationnels. Or, cette condition supplémentaire est superflue ⁽³⁾, comme il résulte de la démonstration même du critère C_1 , donnée en [1].

On va utiliser, dans ce qui suit, le critère C_1 , au sens étendu, impliqué par la précédente remarque et qu'on exprime par la paire des conditions :

A_1 : on a, pour tout $r > r_0$ (assez grand), l'inégalité stricte

$$(6) \quad \frac{y_{r+1} - p_{r+1} y_r}{x_{r+1} - p_{r+1} x_r} > \frac{y_{r+2} - p_{r+2} y_{r+1}}{x_{r+2} - p_{r+2} x_{r+1}}, \quad (r \in S),$$

où l'on a posé, par définition,

$$p_{r+1} = \frac{q_{r+1}}{q_r}, \quad (r \in S);$$

B_1 : pour une suite infinie et croissante S_1 d'indices $r = r_v$, on a les inégalités :

$$(7) \quad \xi_{r_v} \geq \xi_{r_{v+1}}, \quad \eta_{r_v} \geq \eta_{r_{v+1}}, \quad (r_v < r_{v+1}, v \in S),$$

où l'on a posé, par définition,

$$(8) \quad \xi_r = 1 - F \frac{x_r}{q_r}, \quad \eta_r = F \frac{y_r}{q_r} \quad (4), \quad (r \in S).$$

On peut aussi rendre C_1 sous la forme, plus commode, des quatres conditions simultanées qui suivent et dont la paire $A_1.1^\circ, A_1.2^\circ$ implique A_1 ⁽⁵⁾, tandis que la paire $B_1.1^\circ, B_1.2^\circ$ équivaut à B_1 . Voici leur énoncé :

Condition $A_1.1^\circ$: On a, pour tout $r > r_0$, où r_0 est assez grand, convenable, les inégalités (au sens large)

$$(9) \quad \frac{y_{r+1}}{q_{r+1}} - \frac{y_r}{q_r} \geq \frac{y_{r+2}}{q_{r+2}} - \frac{y_{r+1}}{q_{r+1}}, \quad (r \in S).$$

Condition $A_1.2^\circ$: On a aussi, pour tout $r > r_0$, les inégalités (au sens strict)

$$(10) \quad 0 < \frac{x_{r+1}}{q_{r+1}} - \frac{x_r}{q_r} < \frac{x_{r+2}}{q_{r+2}} - \frac{x_{r+1}}{q_{r+1}}, \quad (r \in S).$$

Condition $B_1.1^\circ$: Pour chaque indice $r = r_v$, d'une suite infinie et croissante, convenable $S_1 \subset S$, on a l'inégalité (au sens large)

$$(11) \quad \eta_{r_v} \geq \eta_{r_{v+1}} \quad (v \in S, r_v < r_{v+1}).$$

Condition $B_1.2^\circ$: On a aussi, pour la même suite S_1 d'indices $r = r_v$ de la condition précédente, l'inégalité (au sens large)

$$(12) \quad \xi_{r_v} \geq \xi_{r_{v+1}} \quad (v \in S, r_v < r_{v+1}).$$

(3) Dans le cas présent, les valeurs α_r (2), (3) sont des puissances fractionnaires (non entières) du nombre 2, donc des irrationnelles et les conditions [1] ⁽³⁾ inutiles pour C_1 .

(4) On designera comme en [1], pour tout μ réel, par $E\mu$ l'entier, tel qu'on ait $\mu - 1 < E\mu \leq \mu$ et l'on posera $F\mu = \mu - E\mu$.

(5) Variante possible: Interchanger $\geq, <$, en (9), (10)

On procède à une démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\alpha = 2^{e-1}$, en vérifiant d'abord que les trois conditions précédentes $A_1.1^\circ$, $A_1.2^\circ$, $B_1.1^\circ$ sont satisfaites, si l'on a choisi convenablement, comme ci-dessus en (4), la suite des paramètres q_r ($r \in S$). Voici le détail de ces vérifications.

$A_1.1^\circ$. - On satisfait à (9) car, l'inégalité y étant prise au sens large, il suffit en s'appuyant sur (5) de constater qu'on a, pour tout $r \in S$,

$$(r+1) - r = (r+2) - (r+1) = 1.$$

En s'appuyant sur (5), on écrit la condition (10), sous la forme des inégalités strictes

$$(13) \quad 0 < \frac{r+1}{2^{e_{r+1}}} - \frac{r}{2^{e_r}} < \frac{r+2}{2^{e_{r+2}}} - \frac{r+1}{2^{e_{r+1}}}, \quad (r \in S).$$

On vérifie directement (13) pour les valeurs numériques 1, 2 de r , car la formule (2) donne

$$(14) \quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{3}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{5}{3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{41}{24}$$

et il suffit de constater qu'on a

$$(15) \quad 0 < \frac{2}{2^{3/2}} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2^{5/3}} - \frac{2}{2^{3/2}} < \frac{4}{2^{41/24}} - \frac{3}{2^{5/3}}.$$

En ce qui concerne les valeurs $r \geq 2$, on vérifie la formule (13) en procédant comme il suit.

On multiplie par $2^{e_{r+1}}$ en (13) et l'on obtient son équivalent, qu'on peut écrire

$$2 < \frac{r+2}{r+1} \cdot \frac{1}{2^{e_{r+2}-e_{r+1}}} + \frac{r}{r+1} \cdot 2^{e_{r+1}-e_r}.$$

Or, en invoquant (2), on a

$$(16) \quad \varepsilon_{r+1} - \varepsilon_r = \frac{1}{(r+1)!}, \quad (r \in S)$$

et l'équivalent précédent de (13) s'écrit encore sous la forme

$$(17) \quad 2 < \frac{r+2}{r+1} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{(r+2)!}}} + \frac{r}{r+1} \cdot 2^{\frac{1}{(r+1)!}}, \quad (r \in S).$$

Par multiplication de cette inégalité par $\frac{r+1}{r}$ on en tire encore un équivalent de (13)

$$(18) \quad 2 + \frac{2}{r} < \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{(r+2)!}}} + 2^{\frac{1}{(r+2)!}} \right] + \left[2^{\frac{1}{(r+1)!}} - 2^{\frac{1}{(r+2)!}} \right] + \frac{1}{r} \cdot 2^{1 - \frac{1}{(r+2)!}},$$

qu'on prouve de la manière suivante. L'inégalité

$$(19) \quad 2 < \frac{1}{2^{\frac{1}{(r+2)!}}} + 2^{\frac{1}{(r+2)!}},$$

s'obtient directement ⁽⁶⁾ de

$$u > 1, \quad \frac{1}{u} + u > 2 \iff u^2 - 2u + 1 > 0 \iff (u - 1)^2 > 0,$$

lorsqu'on y remplace u par le premier terme de l'inégalité

$$(20) \quad 2^{\frac{1}{(r+2)!}} > 1,$$

qui résulte du fait que 2^λ est une fonction croissante de λ réel.

On obtiendra donc (18) comme conséquence de (19) et de l'inégalité

$$(21) \quad \frac{2}{r} < 2^{\frac{1}{(r+1)!}} - 2^{\frac{1}{(r+2)!}} + \frac{1}{r} \cdot 2^{1 - \frac{1}{(r+2)!}},$$

qui reste à démontrer. En divisant par $2^{\frac{1}{(r+2)!}}$ en (21), on obtient son équivalent

$$(22) \quad \frac{1}{r} \cdot 2^{1 - \frac{1}{(r+2)!}} \left[2^{\frac{1}{(r+2)!}} - 1 \right] < 2^{\frac{1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+2)!}} - 1.$$

Or, pour $r \geq 2$, on a

$$(23) \quad 0 < \frac{1}{r} \cdot 2^{1 - \frac{2}{(r+2)!}} < 1,$$

puisque 2^λ est croissante et qu'on a donc $2^{1 - \frac{2}{(r+2)!}} < 2$, tandis que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. Or, le produit membre à membre des deux dernières inégalités implique (23).

Il suffira de montrer encore qu'on a, pour $r \geq 2$, l'inégalité

$$(24) \quad 2^{\frac{1}{(r+2)!}} - 1 < 2^{\frac{1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+2)!}} - 1,$$

car en multipliant (23), (24) on aura *a fortiori* (22) $\iff$ (21). Or de (19), (21) on obtient par addition (18).

Comme on a déjà vérifié (15) et qu'on a démontré les équivalences (13) $\iff$ (17) $\iff$ (18), on vérifie $A_1.2^\circ$ en prouvant encore (24). Cette inégalité sera déduite de la suite d'inégalités successives équivalentes

$$2^{\frac{1}{(r+2)!}} < 2^{\frac{1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+2)!}} \iff \frac{1}{(r+2)!} < \frac{1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+2)!},$$

dont la dernière revient, après multiplication par $(r+1)!$ à $\frac{2}{r+2} < 1$ et donc à $r > 0$, ce qui achève la vérification de l'énoncé de $A_1.2^\circ$ dans le cas de α défini en (1).

$B_1.1^\circ$. — En vertu de (5), on a, pour tout r ,

$$\eta_r = F \frac{y_r}{q_r} = Fr = 0$$

(6) On introduit les symboles logiques d'implication $\rightarrow$ et d'équivalence $\iff$.

et donc la condition (11) est satisfaite par l'égalité $\eta_{r_v} = \eta_{r_{v+1}}$, quelle que soit la suite $S_r \subset S$ et $r = r_v \in S_r$, pour $v \in S$. La condition $B_r.1^\circ$ est donc aussi satisfaite.

On reprend la démonstration de l'irrationalité de α , en admettant - par absurde - l'hypothèse de la rationalité de 2^{e-1} . On pose donc

$$(25) \quad 2^{e-1} = \frac{u}{v},$$

où u, v sont des nombres naturels, premiers entre eux.

On pose

$$(26) \quad \delta_r = \frac{r+1}{2^{\varepsilon_{r+1}}} - \frac{r}{2^{\varepsilon_r}}, \quad (r \in S)$$

et l'on démontre, qu'on a

$$(27) \quad 0 < \delta_r < \frac{1}{2^{\varepsilon_r}} < 1, \quad (r \in S).$$

On peut écrire, en effet, en vertu de (16), l'égalité (26) sous la forme

$$(28) \quad \delta_r = \frac{1}{2^{\varepsilon_r}} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{r+1}}} (r+1) - r \right]$$

et remarquer qu'on a déjà eu $\delta_r > 0$ en (13). Or, puisque 2^λ croît avec λ réel et que (1), (2) entraînent l'inégalité $\varepsilon_r < e - 1$, on a

$$(29) \quad 2^{\frac{1}{r+1}} > 1, \quad 2^{\varepsilon_r} < 2^{e-1},$$

ce qui implique la seconde inégalité de (27), la paranthèse en (28) ayant une valeur inférieure à 1.

En invoquant (13), (27), pour tout $r \in S$ et en y passant à la limite, on aura, en vertu de la transitivité

$$(30) \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_r < \delta_{r+1} < \dots < \frac{1}{2^{e-1}} < 1.$$

De (26), (27), (29), (30) on tire 2^{ε_r} tend vers 2^{e-1} en croissant

$$(31) \quad 0 < \delta_r < \frac{r+1}{2^{\varepsilon_{r+1}}} - \frac{r}{2^{e-1}} \leq 1.$$

En considérant les valeurs u, v de (25), ainsi que les indices $v' = 1, 2, \dots$, on posera

$$(32) \quad r_{v'} = v' \cdot u, \quad (v' \in S).$$

Les inégalités (31) donnent, par suite de (25), (32)

$$(33) \quad 0 < \delta_{r_{v'}} < \frac{1 + r_{v'}}{2^{\varepsilon_{(1+r_{v'})}}} - v' \cdot v \leq 1, \quad (v' \in S).$$

En introduisant les indices notés $r'_{v'}$ ($v' \in S$) et définis par l'égalité

$$(34) \quad r = r'_{v'} = 1 + r_{v'}$$

on voit que ces indices vont en croissant avec $v' \in S$, en vertu de (32).

On écrira donc (33) sous la forme

$$(35) \quad 0 < \delta_{r_{v'}} < \frac{r'_{v'}}{2^{\varepsilon_{r_{v'}}}} - v' \cdot v \leq 1, \quad (v' \in S).$$

Comme $v' \cdot v$ est un entier, l'inégalité (35) implique ⁽⁷⁾

$$(36) \quad 0 < \delta_{r_{v'}} < F \frac{r'_{v'}}{2^{\varepsilon_{r_{v'}}}}, \quad (v' \in S)$$

et, en invoquant (8) pour la définition générale des ξ_r ($r \in S$), on obtient

$$(37) \quad \xi_{r_{v'}} = 1 - F \frac{r'_{v'}}{2^{\varepsilon_{r_{v'}}}} < 1 - \delta_{r_{v'}}, \quad (v' \in S).$$

On désigne par Z' l'ensemble des valeurs $\xi_{r_{v'}}$ ($v' \in S$) et l'on y choisit un sous-ensemble $Z \subset Z'$ de valeurs désignées par $\xi_{r_v} \in Z$, en procédant comme il suit.

À chaque nombre $v = 1, 2, \dots$ on attachera une valeur de l'indice $r = r_v$, croissant avec v , ce qui revient à effectuer un numérotage des valeurs ξ_r choisies en Z' , en posant – par définition –

$$(38) \quad \xi_{r_v} = \inf_{v' \leq v} \{ \xi_{r_{v'}} \}, \quad (v \in S, \xi_{r_{v'}} \in Z').$$

Il est clair, d'une part, que $\xi_{r_v} \in Z'$, car en (38) v' n'y prend qu'un nombre fini de valeurs $v' \leq v$ et qu'il existe donc un nombre v' bien déterminé, pour lequel le minimum parmi les $\xi_{r_{v'}}$ est atteint en (38). Et d'autre part, lorsque v' parcourt S , on a (30) ce qui implique entre les seconds membres des inégalités (37), les inégalités

$$(39) \quad 1 - \delta_{r_{v'}} > 1 - \delta_{r_{v'+1}}.$$

On peut remarquer que, malgré (37), cela n'implique pas les inégalités

$$\xi_{r_{v'}} \geq \xi_{r_{v'+1}}, \quad (v' \in S),$$

de sorte qu'on est dans la nécessité d'opérer d'abord le choix défini en (38). Cela fait, on aura donc

$$(40) \quad \xi_{r_v} \in Z \longleftrightarrow \xi_{r_v} = 1 - F \frac{r_v}{2^{\varepsilon_{r_v}}}, \quad (v \in S)$$

et la suite S_i des indices r_v appartenant aux ξ_{r_v} choisis en (38) est infinie, car v parcourt S et r_v croît avec v . Or, en (38), ξ_{r_v} étant le plus petit parmi les $\xi_{r_{v'}}$ où $v' \leq v$, il ne peut que diminuer ou conserver sa valeur, lorsque v croît.

On obtient ainsi

$$\xi_{r_v} \geq \xi_{r_{v+1}}, \quad (v \in S),$$

qui n'est autre que l'inégalité (12) à démontrer et montre que la condition $B_{1.2^\circ}$ est satisfaite.

(7) On utilise la définition de l'opérateur F donnée en bas de page, dans la note ⁽⁴⁾ ci-dessus.

Or, on a admis, par hypothèse, que α est rationnel et l'on a vérifié ainsi, qu'en ce cas, en plus des conditions $A_1.1^\circ$, $A_1.2^\circ$, $B_1.1^\circ$ précédemment obtenues, $B_1.2^\circ$ aurait aussi lieu. En somme, toutes les conditions du critère C_1 seraient donc, en ce cas, satisfaites et l'application du critère permettrait de conclure que α devrait être irrationnel. Or cela contredit directement l'hypothèse admise.

Ce raisonnement montre donc que la supposition de la rationalité de α est absurde et cela conduit à la conclusion opposée : $\alpha = 2^e - 1$ est irrationnel et, par suite, 2α jouit de la même propriété : 2^e est irrationnel, *c.q.f.d.*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] FRODA A., *Critères paramétriques d'irrationalité*, «Mathematica Scandinavica», vol. 12, Kobenhaven 1964, sous presse.
- [2] HARDY-WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, 3rd Ed., London 1954.