
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

FULVIA SKOF

Sull'attenuazione delle condizioni tauberiane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.6, p. 466–468.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_466_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Funzioni analitiche. — *Sull'attenuazione delle condizioni tauberiane.* Nota di FULVIA SKOF (*), presentata (**) dal Corrisp. G. RICCI.

1. Sia $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ convergente per $|z| < 1$;

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (z = r e^{i\theta}); \quad s_n(1) = s_n.$$

È ben noto che

(I) Da $n |a_n| = O(1)$, $f(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 1$ — segue $s_n \rightarrow 0$

(J. E. Littlewood, [2]).

(II) Da $s_v - s_u > -\sigma$ per $u_0 \leq u < v \leq u(1 + \omega)$ ($\sigma > 0$, $\omega = \omega(\sigma)$, $u_0 = u_0(\sigma)$) e $f(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 1$ — segue $s_n \rightarrow 0$

(R. Schmidt [3]—T. Vijayaraghavan [6]).

Sia (C) la classe delle serie $f(z)$ *continue* per $|z| \leq 1$, cioè tali che per ogni θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) esiste finito il limite radiale $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r e^{i\theta}) = g(\theta)$ uniforme rispetto a θ , e si conviene di porre $f(e^{i\theta}) = g(\theta)$.

L'attenuazione della condizione tauberiana (contenuta in (I) oppure in (II)) può condurre a s_n divergente anche con $f(r) \rightarrow 0$. Come è noto, esistono $f(z) \in (C)$ per le quali s_n diverge (L. Fejér [1]—P. Turán [5]) e queste $f(z)$ non verificano alcuna condizione sufficiente tauberiana; tutt'al più potranno per esempio verificare condizioni analoghe a quelle in (I) e in (II), ottenute da esse introducendovi qualche attenuazione. È stato anche stabilito (E. C. Titchmarsh [4]), che se $f(z) \in (C)$ risulta $s_n = o(\log n)$.

Quanto e come le attenuazioni accennate possono influire sull'andamento di s_n ? Questo è il tema trattato nella presente Nota, con la quale si comunicano risultati le cui dimostrazioni verranno pubblicate altrove.

P. Turán [5] ha dimostrato che, assegnata $\psi(t) \rightarrow +\infty$ (lentamente quanto si vuole) esistono $f(z) \in (C)$ per le quali $n |a_n| \leq \psi(n)$, $s_n \neq O(1)$.

Si perviene a tre teoremi, e precisamente: (A), attenuando (I) secondo il punto di vista di P. Turán e non imponendo condizioni a priori alla successione s_n ; (B), attenuando (II) e non imponendo alcuna condizione a priori ad a_n ; (C), attenuando (I) e (II) simultaneamente col porre così condizioni a priori ad a_n e s_n (tauberiane attenuate).

In ciascuno dei tre casi si stabilisce l'esistenza di successioni parziali n_h lungo le quali s_n è limitato dal di sotto: in questo modo si pone in rilievo

(*) Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca N. 40 (1962–1963) del Comitato nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

quanto, in accordo con la relazione $s_n = o(\log n)$, l'ordine di s_n si stacchi da quello di $\log n$.

2. Il seguente teorema precisa il risultato di P. Turán:

TEOREMA (A). - *Assegnate due funzioni $\psi(t) > 0$, $\varepsilon(t) > 0$, che per $t \rightarrow +\infty$ verificano le condizioni: $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $\psi(t) \rightarrow +\infty$ monotona, $\psi(t)|t \rightarrow 0$ monotona, esiste $f(z) \in (\mathcal{C})$ con le seguenti proprietà:*

- i) $|a_n| \leq \psi(n)/n$;
- ii) *esiste una successione n_h lungo la quale si ha*

$$|a_{n_h}| = \psi(n_h)/n_h, \quad |s_{n_h}| > \varepsilon(n_h) \log \psi(n_h).$$

Come corollario si ottiene il risultato di L. Féjer-E. C. Titchmarsh [4]:

«Assegnata $\varepsilon(t) > 0$, con $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, esiste $f(z) \in (\mathcal{C})$ per la quale sono verificate le seguenti proprietà:

- i) $a_n \rightarrow 0$;
- ii) *lungo una successione n_h risulta $|s_{n_h}| > \varepsilon(n_h) \log n_h$.*

La classica condizione presentata in (II) può essere attenuata col richiedere la sua validità per intervalli $u_0 \leq u < v \leq u + \chi(u)$ essendo $\chi(u) = o(u)$; nessuna condizione a priori viene imposta ad a_n .

TEOREMA (B). - *Assegnati un numero $\sigma > 0$ e due funzioni $\varepsilon(t) > 0$, $\chi(t) > 0$, che verificano le condizioni:*

$$\begin{cases} \varepsilon(t) \rightarrow 0, \chi(t) \rightarrow +\infty, \chi(t) = o(t) \text{ per } t \rightarrow +\infty \\ \chi(t) \text{ e } \chi(t)|t \text{ monotone,} \end{cases}$$

esiste $f(z) \in (\mathcal{C})$ per la quale sono verificate le seguenti proprietà:

- i) *esiste $u_0 = u_0(\sigma; \chi, \varepsilon) > 0$ tale che*

$$s_v - s_u \geq -\sigma \text{ per } u_0 \leq u < v \leq u + \chi(u)$$

- ii) *lungo una successione n_h risulta*

$$|s_{n_h}| > \varepsilon(n_h) \log(n_h \chi(n_h)).$$

3. Rimane da affrontare la ricerca di funzioni $f(z) \in (\mathcal{C})$ per le quali sia maggiorata la successione dei coefficienti, attenuando la condizione in (I), e sia contratto l'intervallo $u < v \leq u(1 + \omega)$, attenuando la condizione in (II). Si perviene al seguente

TEOREMA (C). - *Assegnati un numero $\sigma > 0$, e tre funzioni $\varepsilon(t) > 0$, $\chi(t) > 0$, $\psi(t) > 0$ che verificano le condizioni*

$$\begin{cases} \varepsilon(t) \rightarrow 0, \chi(t) \rightarrow +\infty, \psi(t) \rightarrow +\infty, \chi(t) \cdot \psi(t) = o(t) \text{ per } t \rightarrow +\infty; \\ \chi(t), \psi(t), \psi(t)|t, \chi(t) \cdot \psi(t)|t \text{ monotone,} \end{cases}$$

esiste $f(z) \in (\mathcal{C})$ per la quale sono verificate le seguenti proprietà:

- i) $|a_n| \leq \psi(n)/n$;

ii) esiste $u_0 = u_0(\sigma; \chi\psi) > 0$ tale che

$$s_v - s_u > -\sigma \text{ per } u_0 \leq u < v \leq u + \chi(u);$$

iii) lungo una successione n_h risulta

$$|a_{n_h}| = \psi(n_h)/n_h, \quad |s_{n_h}| > \varepsilon(n_h) \log \psi(n_h).$$

Osservazione. – Si richiama l'attenzione sulla forma dell'ipotesi $\chi(t) \cdot \psi(t) = o(t)$, la quale esprime chiaramente in qual modo l'attenuazione ottenuta con $\psi(t)$ e quella ottenuta con $\chi(t)$ siano fra loro mutuamente vincolate.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] FEJÉR L., *Ueber gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze*, «Sitzungsb. d. math. phys. Kl. d. Akad. Wiss.», München 1910, 3 Abh., 17 pp.
- [2] LITTLEWOOD J. E., *The converse of Abel's theorem on power series*, «Proc. London Math. Soc.», (2) 9, 434-448 (1911).
- [3] SCHMIDT R., *Ueber divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*, «Math. Zeitschr.», 22, 89-152 (1925).
- [4] TITCHMARSH E. C., *The theory of functions*, 2 ed., London (1960), p. 418.
- [5] TURÁN P., *On a point in the theory of power series*, (in ungherese), «Matem. Lapok», 10, 278-283 (1959).
- [6] VIJAYARAGHAVAN T., *A Tauberian theorem*, «Journ. London Math. Soc.», 1, 113-120 (1926).