Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Ossicini

Problema singolare di Cauchy, relativo ad una generalizzazione dell'equazione di Eulero-Poisson-Darboux

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 454–459.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_454_0>

Analisi matematica. — *Problema singolare di Cauchy, relativo ad una generalizzazione dell'equazione di Eulero–Poisson–Darboux* (*). Nota di ALESSANDRO OSSICINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota diamo la formula risolutiva del problema di Cauchy singolare, per una equazione che generalizza l'equazione differenziale di Eulero–Poisson–Darboux (1).

Posto

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \quad , \quad p \geq 1 \quad , \quad \Delta = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

e considerato l'operatore lineare

$$L_k = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{k}{t} \frac{\partial}{\partial t}$$

ove k è un numero reale scelto in modo che $k - p + 1 > 0$; determiniamo una funzione $u(x, t) = u(x_1, x_2, \cdots, x_p, t)$ di classe $C^{(2)}$ soluzione della equazione:

$$(1.1) \qquad L_k u - u = 0 , \qquad t > 0$$

soddisfacente sull'iperpiano $t = 0$ alle condizioni iniziali

$$(1.2) \qquad u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0 ,$$

con $f(x)$ funzione assegnata di classe $C^{(2)}$.

2. Cominciamo col determinare una soluzione della (1.1) con simmetria sferica, cioè una funzione u dipendente, oltre che dalla variabile temporale t, solamente dalla distanza $r = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)^{1/2}$.

Poiché si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{x_i^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \frac{\partial u}{\partial r}$$

abbiamo che in tal caso l'equazione (1.1) si muta in quest'altra nelle due variabili indipendenti t, r:

$$(1.3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{p-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{t} \frac{\partial u}{\partial t} - u = 0 .$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del C.N.R. (presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo).

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) Il teorema di esistenza e unicità dimostrato per $p = 2$, $k > 0$, in [1] vale anche nel caso $k - p + 1 > 0$, $p \geq 1$.

I numeri tra parentisi [ ] si riferiscono alla Bibliografia posta in fine.

Eseguendo il cambiamento della funzione integranda dato dalla

$$u = vt^{1-k}$$

si perviene, per la (1.3) all'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{p-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2-k}{t}\frac{\partial v}{\partial t} - v = 0 . \tag{1.4}$$

Una soluzione elementare della (1.4) si può esprimere mediante le funzioni di Bessel.

Infatti operando la ulteriore sostituzione

$$v = \varphi(\xi) , \qquad \text{con} \quad \xi = t^2 - r^2, \tag{1.5}$$

si ottiene l'equazione differenziale di Lommel

$$\xi\varphi'' + (1 - \nu)\,\varphi' + \frac{\varphi}{4} = 0 \tag{1.6}$$

con

$$\nu = \frac{k-p-1}{2} .$$

L'integrale generale della (1.6) può mettersi sotto la forma (2)

$$\varphi = c_1 (t^2 - r^2)^{\nu/2}\, J_\nu(\sqrt{t^2 - r^2}) + c_2 (t^2 - r^2)^{\nu/2}\, J_{-\nu}(\sqrt{t^2 - r^2}) , \tag{1.7}$$

ove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie, mentre $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ sono le funzioni di Bessel di prima specie. Nel caso che ν sia intero in luogo di $J_{-\nu}(z)$ va posta la funzione di Bessel di seconda specie $Y_\nu(z)$.

Moltiplicando la φ, data da (1.7), per t^{1-k} si ha una funzione soddisfacente alla (1.1) per $t > 0$.

3. La soluzione del problema di Cauchy posto nel n. 1 per $t > 0$ è data da

$$u(x, t) = A_k^{-1} \int\limits_{|x-y| \leq t} f(y)\, t^{1-k} (t^2 - R_{xy}^2)^{\nu/2}\, J_\nu\left(\sqrt{t^2 - R_{xy}^2}\right) dy , \tag{3.1}$$

ove

$$A_k = \frac{\pi^{p/2}}{2^\nu \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \quad ; \quad R_{xy} = |x - y| = \left[\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} . \tag{3.2}$$

Proviamo ora che la (3.1) verifica le condizioni richieste dal problema. Effettuando nell'integrale il cambiamento di variabile

$$y = x + \alpha t .$$

ove α indica $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$ e ponendo

$$\psi(t, \alpha) = t^{-\nu} (1 - |\alpha|^2)^{\nu/2}\, J_\nu(t\sqrt{1 - |\alpha|^2}) \tag{3.3}$$

(2) Cfr. [2] p. 97.

si trova

$$u(x, t) = A_k^{-1} \int_{|\alpha| \leq 1} f(x + \alpha t)\, \psi(t, \alpha)\, d\alpha. \tag{3.4}$$

Derivando, come si può, sotto il segno d'integrale abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_k^{-1} \int_{|\alpha| \leq 1} \left[\psi \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \psi_t f \right] d\alpha$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_k^{-1} \int_{|\alpha| \leq 1} \left\{ \psi_{tt} f + 2\psi_t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \psi \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 f \right\} d\alpha$$

mentre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = A_k^{-1} \int_{|\alpha| \leq 1} \left[\psi \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right] d\alpha$$

da cui segue

$$\begin{aligned} L_k u - u = A_k^{-1} \int_{|\alpha| \leq 1} \Bigg\{ & \psi \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \psi \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 f + \\ & - 2\psi_t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{k}{t} \psi \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - f \left[\psi_{tt} + \frac{k}{t} \psi_t + \psi \right] \Bigg\} d\alpha. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posto $\rho^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2$, si vede facilmente che la funzione

$$\psi(t, \rho) = t^{-\nu} (1 - \rho^2)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu (t \sqrt{1 - \rho^2}), \tag{3.6}$$

a causa delle (1.6) e (1.7), soddisfa l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} & (1 - \rho^2)\, \psi_{\varrho\varrho} + 2\rho t \psi_{t\varrho} - t^2 \psi_{tt} + \\ & + \left[\frac{p-1}{\rho} + (2\nu - p - 1)\rho \right] \psi_\varrho - (2\nu - p + 1)\, t\psi_t - (t^2 - 2p\nu)\, \psi = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

In conseguenza per l'integrale (3.5) otteniamo tenendo conto che $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x + \alpha t) = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(x + \alpha t)$

$$L_k u - u = \frac{A_k^{-1}}{t^2} \int_{|\alpha| \leq 1} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[B_0^{(i)} f + \sum_{j=1}^{p} B_j^{(i)} f_{\alpha_j} \right] d\alpha, \tag{3.8}$$

con

$$\begin{cases} B_0^{(i)} = \alpha_i \left[-\frac{1 - \rho^2}{\rho} \psi_\varrho - 2t\psi_t - 2\nu\psi \right] \\ B_i^{(i)} = (1 - \alpha_i^2)\, \psi \\ B_j^{(i)} = -\alpha_i \alpha_j \psi, \qquad (i \neq j). \end{cases} \tag{3.9}$$

Mostriamo ora che l'espressione

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[B_o^{(i)} f + \sum_{j=1}^{p} B_j^{(i)} f_{\alpha_j} \right] \tag{3.10}$$

tende uniformemente a zero per $\rho \to 1$. Resterà con ciò dimostrato che la (3.1) soddisfa l'equazione differenziale (basterà applicare il teorema della divergenza).

Utilizzando le formule ricorrenti [3]

$$\begin{cases} z J'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -z J_{\nu+1}(z) \\ z J'_\nu(z) + \nu J_\nu(z) = z J_{\nu-1}(z) \end{cases} \tag{3.11}$$

abbiamo

$$\begin{cases} \psi_\rho = -t^{-\nu+1} \rho (1-\rho^2)^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(t\sqrt{1-\rho^2}) \\ \psi_t = -t^{-\nu} (1-\rho^2)^{\frac{\nu+1}{2}} J_{\nu+1}(t\sqrt{1-\rho^2}) . \end{cases} \tag{3.12}$$

La prima delle (3.9) potrà mettersi sotto la forma

$$B_o^{(i)} = \alpha_i t^{-\nu+1} (1-\rho^2)^{\frac{\nu+1}{2}} J_{\nu+1}(t\sqrt{1-\rho^2}) .$$

Se teniamo conto che per la funzione $J_\nu(z)$ di Bessel di 1ª specie si ha per $z \to 0$ [4]

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} [1 + o(z^2)] ,$$

otteniamo, tenuto conto della (3.6),

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[B_o^{(i)} f + \sum_{j=1}^{p} B_j^{(i)} f_{\alpha_j} \right] \right| \leq C (1-\rho^2)^{\nu+1}$$

con C costante assoluta.

Onde resta così dimostrato che la (3.10) tende uniformemente a zero per $\rho \to 1$ e la (3.1) risulta quindi soluzione dell'equazione (1.1).

4. Proviamo ora che la (3.1) verifica la condizione iniziale

$$u(x, 0) = f(x) .$$

Avendosi

$$f(x + \alpha t) = f(x) + O(t)$$

ne segue

$$u(x, t) = A_k^{-1} f(x) \int_{|\alpha| \leq 1} \psi(t, \rho) \, d\alpha + O(t) . \tag{4.1}$$

(3) Cfr. [2] p. 45.
(4) Cfr. [2] p. 44.

Se eseguiamo la trasformazione di coordinate

$$
(4.2)\qquad \begin{cases}
\alpha_1 = \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cdots \operatorname{sen} \theta_{p-2} \operatorname{sen} \theta_{p-1} \\
\alpha_2 = \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cdots \operatorname{sen} \theta_{p-2} \cos \theta_{p-1} \\
\alpha_3 = \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{p-1} = \rho \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \\
\alpha_p = \rho \cos \theta_1
\end{cases}
$$

ove θ_{p-1} varia nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e le θ_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, p-2)$ in $(0, \pi)$ otteniamo per l'integrale (4.1) l'espressione

$$
(4.3)\qquad u(x, t) = A_k^{-1} f(x)\, \omega_p\, t^{-\nu} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{\nu}{2}} \rho^{p-1} J_\nu (t\sqrt{1-\rho^2})\, d\rho + O(t)
$$

ove $\omega_p = \dfrac{2\pi^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$ indica la misura ipersuperficiale della ipersfera di raggio 1.

Mediante la sostituzione

$$
(4.4)\qquad \rho = \cos \lambda
$$

perveniamo alla

$$
(4.5)\qquad u(x, t) = A_k^{-1} f(x)\, \omega_p\, t^{-\nu} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{\nu+1} \lambda \cos^{p-1} \lambda\, J_\nu (t \operatorname{sen} \lambda)\, d\lambda + O(t)\,;
$$

dalla validità dell'integrale di Sonine (5)

$$
(4.6)\qquad J_{\nu+\mu+1}(t) = \frac{t^{\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{\nu+1} \lambda \cos^{2\mu+1} \lambda\, J_\nu (t \operatorname{sen} \lambda)\, d\lambda
$$

si ha

$$
(4.7)\qquad u(x, t) = A_k^{-1} f(x)\, \pi^{p/2}\, 2^{p/2}\, t^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(t) + O(t)\,.
$$

Poiché la funzione $z^{-\nu} J_\nu(z)$ è una trascendente intera che per $z = 0$ assume il valore $\dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ risulta, tenuto conto della (3.2)

$$
u(x, 0) = f(x)\,.
$$

5. Passiamo ora a provare che la (3.1) verifica anche l'altra condizione iniziale

$$
u_t(x, 0) = 0\,.
$$

(5) Cfr. [2] p. 373.

Poiché

$$f(x+\alpha t) = f(x) + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + O(t^2)$$

si ottiene derivando, come si può, sotto il segno d'integrale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_k^{-1} \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \int_{|\alpha| \leq 1} \alpha_i \, [\psi + t\psi_t] \, d\alpha \right] + A_k^{-1} f(x) \int_{|\alpha| \leq 1} \psi_t \, d\alpha + O(t) \,. \tag{5.1}$$

Il primo integrale si vede immediatamente che è nullo in virtù della simmetria. Per il secondo integrale si ha a causa della $(3.12)_2$

$$\int_{|\alpha| \leq 1} \psi_t \, d\alpha = -t^{-\nu} \omega_p \int_0^1 \rho^{p-1} (1-\rho^2)^{\frac{\nu+1}{2}} J_{\nu+1}(t\sqrt{1-\rho^2}) \, d\rho \,.$$

Colle sostituzioni (4.2), (4.4) esso diviene

$$\int_{|\alpha| \leq 1} \psi_t \, d\alpha = -t^{-\nu} \omega_p \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{\nu+2} \lambda \cos^{p-1} \lambda \, J_{\nu+1}(t \operatorname{sen} \lambda) \, d\lambda$$

e quindi tenuto conto della (4.6) si ottiene

$$\int_{|\alpha| \leq 1} \psi_t \, d\alpha = -\pi^{p/2} \, 2^{p/2} t^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(t) \,;$$

in conseguenza si ha per la (5.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A_k^{-1} f(x) \, \pi^{p/2} \, 2^{p/2} \, t^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(t) + O(t) \tag{5.2}$$

e si perviene in definitiva alla

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = 0 \,.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. B. DIAZ e G. S. S. LUDFORD, *On the singular Cauchy problem for generalization of the Euler–Poisson–Darboux equation in two space variables*, «Annali di Matematica pura ed applicata», Serie IV, Tomo XXXVIII (1955).

[2] G. N. WATSON, *A Treatise on the theory of Bessel functions*. (Cambridge–University, 1948).

[3] J. B. DIAZ, *Some Recent Results in linear Partial Differential Equations* (Dagli «Atti del Convegno sulle equazioni alle derivate parziali» Trieste – agosto 1954).