Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Stefania Ruscior

Sul metodo integrale di risoluzione di una classe di problemi al contorno concernenti talune equazioni integro-differenziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 448–453.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_448_0>

Analisi matematica. — *Sul metodo integrale di risoluzione di una classe di problemi al contorno concernenti talune equazioni integro–differenziali* (*). Nota di STEFANIA RUSCIOR, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Nella sua classica Memoria concernente i nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica–Matematica, il Picone [1] addita la portata dell'utilizzazione nelle varie classi di problemi al contorno delle condizioni spettanti alle derivate totali, definite nel caso delle derivate del primo ordine (derivate nel senso di Picone) tramite

$$(*) \qquad \mathrm{D}u \equiv u' = \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \cdots \partial x_m} .$$

Dopo ciò il Mangeron ha studiato sistematicamente vari classi di problemi al contorno per le equazioni a derivate parziali d'ordine superiore di Picone, di cui il prototipo ha la forma

$$(**) \qquad \begin{gathered} [\mathrm{A}(x)\, u' + \lambda \mathrm{B}(x)\, u]' + \lambda\, [\mathrm{B}(x)\, u' + \mathrm{C}(x)\, u] = 0, \\ u\,|_{\mathrm{FrR}} = 0 \quad , \quad \mathrm{R} = (\overset{*}{x_i} \leq x_i \leq \overset{**}{x_i}), \\ (i = 1, 2, \cdots, 2n \quad ; \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})), \end{gathered}$$

estendendo poscia tali studi, [2]–[5] o in collaborazione col Krivošein [6]–[9], ad una vasta classe di equazioni integro–differenziali con derivate totali oppure parziali, lineari o no, d'ordine superiore, d'importanza sopratutto nell'ambito dei modernissimi rami di fisica odierna [10]–[13].

Collegandomi vieppiù, tramite alcuni lavori che prendono la spinta dagli studi recenti di F. Nožička [14]–[15], con i problemi di geometrizzazione delle equazioni a derivate parziali spettanti alla Fisica Matematica [16]–[18], mi propongo in ciò che segue di applicare il metodo di Mangeron esposto da codesto autore al recente Colloquio organizzato dall'Unione internazionale di Meccanica razionale ed applicata (IUTAM) e consacrato alla Meccanica delle vibrazioni [19]–[20], alla risoluzione di certi problemi non lineari relativi ad una classe di equazioni integro–differenziali (1), ampiamente studiati nel caso lineare dal Mangeron e in collaborazione con L. E. Krivošein in una Nota lincea inaugurale, dedicata a M. Picone all'occasione del Suo 75° compleanno [21]–[23].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto politecnico di Iași, RPR.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) Sottolineamo che il metodo integrale di Mangeron si allinea al suo metodo variazionale, ampiamente utilizzato nella tesi di laurea di F. MANARESI [24] ed altri ancora.

2. Consideriamo il problema di esistenza e di unicità, concernente il sistema integro–differenziale a derivate parziali

$$u(A)|_{FrR} = \varphi_0(A) \quad ; \quad D^i u(A)|_{R_1} = \varphi_i(A) \tag{1}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, k-1),$$

$$D^k u(A) + \sum_{i=k-2}^{\circ} \sum_{j=k-2}^{\circ} B_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \tag{2}$$
$$f_1[A, u(A)] + \iint_R K(A, B) f_2[B, u(B)] \, dB,$$

ove $D \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}$ è il simbolo della derivata prima totale di Picone, $B_{ij}(A) \equiv \equiv B_{ij}(x, y)$; $\varphi_i(A)$, $K(A, B)$ sono funzioni note continue nei loro argomenti per tutti
$$A, B \in R = [a, c] \times [b, d];$$
$d\beta = d\xi \, d\eta$; $f_1[A, u(A)]$, $f_2[B, u(B)]$ sono funzioni note, in generale non lineari rispetto al secondo argomento per tutti $A, B, u \in g\{R, r_1 \leq |u| \leq \leq r_2\}$; FrR è la frontiera del dominio R, mentre $R_1 = \begin{cases} x = a, b \leq y \leq d, \\ y = b, a \leq x \leq c. \end{cases}$

Sia $\Phi(A)$ una funzione nota $2k$ volte derivabile, soddisfacente le condizioni non omogenee (1) e sia $M(A, B)$ la funzione di Green [25], [26] (2) del problema al contorno

$$u(A)|_{FrR} = 0 ; D^i u(A)|_{R_1} = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, k-1) ; D^k u(A) = 0. \tag{3}$$

Si ha allora dalle (1) e (2)

$$u(A) = \Phi(A) + \iint_R M(A, B) \Bigg[f_1[B, u(B)] - \sum_{i=k-2}^{\circ} \sum_{j=k-2}^{\circ} B_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \tag{4}$$
$$+ \iint_R K(B, C) f_2[C, u(C)] \, dC \Bigg] dB \equiv \Phi(A)$$
$$- \iint_R M(A, B) S[u(B)] \, dB + \iint_R f_3[A, B, u(B)] \, dB,$$

ove si è posto, analogamente con le notazioni già usate nel caso lineare dal Mangeron e dal Krivošein,

$$f_2[A, B, u(B)] \equiv M(A, B) f_1[B, u(B)] \tag{5}$$
$$+ f_2[B, u(B)] \iint_R M(A, C) K(C, B) \, dC;$$

(2) Detta « funzione di Mangeron » in alcuni lavori, consacrati a certe estensioni del metodo variazionale escogitato da questo autore, dovuti a MARIO SALVADORI, G. STAMPACCHIA [27], [28].

$$S[u(B)] \equiv \sum_{i=k-2}^{0} \sum_{j=k-2}^{0} B_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta_j} .$$

Introducendo la funzione

$$\varphi(A) \equiv S[u(A)] \tag{6}$$

ed operando con l'operatore S $[\cdot]$ sull'equazione (4), si perviene alla seguente equazione integrale

$$\varphi(A) = \Phi_1(A) + \iint_R M_2(A, B)\, \varphi(B)\, dB + \iint_R f_4[A, B, u(B)]\, dB, \tag{7}$$

ove $\Phi_1(A), M_2(A, B)$ sono funzioni note per tutti $A, B \in R$; $f_4[A, B, u(B)] \equiv S_A[f_3[A, B, u(B)]]$. Sia $\Gamma(A, B)$ il nucleo risolvente del nucleo $M_2(A, B)$. Dall'equazione (7) risulta

$$\varphi(A) = \Phi_1(A) + \iint_R f_4[A, B, u(B)]\, dB + \iint_R \Gamma(A, B) \Big[\Phi_1(B) + \iint_R f_4[B, C, u(C)]\, dC\Big] dB \equiv \Phi_2(A) + \iint_R f_5[A, B, u(B)]\, dB. \tag{8}$$

Epperciò, dalle (4) tenendovisi conto delle (8), si deduce

$$u(A) = \Phi_3(A) + \iint_R f_6[A, B, u(B)]\, dB. \tag{9}$$

Per conseguenza, se la funzione $f_6[A, B, u(B)]$ soddisfa nel dominio $g = \{R, r_1 \leq |u| \leq r_2\}$ rispetto al terzo argomento alla condizione di Lipschitz col coefficiente $\gamma(A, B)$ e se è soddisfatta inoltre l'ineguaglianza

$$\max_R \iint_R \gamma(A, B)\, dB < 1, \tag{10}$$

l'esistenza e l'unicità del problema (1), (2) risultano dal principio delle immagini condensate.

Si può enunciare pertanto il seguente

TEOREMA. – Se M (A, B) è la funzione di Green del problema (3), 1 non è un autovalore del nucleo $M_2(A, B)$; $\Gamma(A, B)$ è il nucleo risolvente di questo nucleo e la funzione $f_6[A, B, u(B)]$ soddisfa nel dominio g alla condizione di Lipschitz rispetto al terzo argomento $\gamma(A, B)$, mentre il coefficiente della condizione lipschitziana soddisfa l'ineguaglianza (10), il problema al contorno (1), (2) possiede una soluzione unica $2k$ volte continuamente derivabile, che può essere costruita tramite il metodo delle approssimazioni successive [29].

3. Applichiamo adesso il metodo di Mangeron delle equazioni integrali [30], alla determinazione della soluzione approssimativa del problema (1), (2) nell'ipotesi che sia noto il nucleo risolvente $\Gamma(A, B)$ (3).

Poiché la risoluzione del problema (1), (2) è equivalente alla risoluzione dell'equazione integrale (9), prendiamo le mosse dall'equazione funzionale ausiliare

$$w(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6 [A, (x_i, y_j), w(x_i, y_j)], (x_i, y_j) \in R, \tag{11}$$

ove c_{ij} sono coefficienti noti che ne figurano nella formula di cubatura scelta per il processo di approssimazione da seguirsi. Mettendovi nella $i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, r$, si perviene ad un sistema non lineare di equazioni numeriche, che può essere trascritto sotto la forma vettoriale-matriciale

$$W = \Phi_1 + T(W). \tag{12}$$

Dalle (12) segue che se la norma dell'operatore T soddisfa l'ineguaglianza

$$\| T \| < 1, \tag{13}$$

allora la soluzione del sistema (12) esiste ed è unica.

Per conseguenza, la funzione $w(A)$ risulta univocamente determinata.

Nel caso in cui la soluzione del sistema (12) si determina con approssimazione, anche la funzione $w(A)$ si determina con approssimazione.

Sia σ_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, r)$ la soluzione (esatta oppure approssimativa) del sistema (12). La soluzione approssimativa del problema (1), (2) risulta per conseguenza data dalla funzione

$$u_{sr}(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6 [A, (x_i, y_j), \sigma_{ij}]. \tag{14}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, «Ann. Sci. de l'Univ., Jassy», I Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, *1*, 183–232 (1940).

[2] D. MANGERON, *Stability solutions of boundary value problems concerning a new class of integro-differential equations with higher order total derivative in Picone's sense*, «Comunic. Acad. R.P.R.», XIII, *8*, 665–670 (1963).

[3] D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore*, «Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat.», Ser. 8ª, XXXIV, *2*, 118–122 (1963).

(3) Un'altra via per la risoluzione del problema (1), (2) sarà esposta, pur utilizzando anche i nostri risultati di qui sopra, in una vasta memoria dovuta al MANGERON e KRIVOŠEIN [31], ove si tiene pure conto dei risultati delle scuole di S. VASILACH [32] e di V. Y. BYKOV [33] e L. E. KRIVOŠEIN [34].

[4] D. MANGERON, *Méthodes nouvelles d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires relatifs aux équations intégro-différentielles aux dérivées partielles*. Colloque d'approximation des fonctions, avec applications au calcul numérique. Cluj, 15–19. XI.1963, pp. 7–8.

[5] D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptique d'ordre supérieur*, «C. r. Acad. Sci., Paris», *255*, 2894–2896 (1962).

[6] D. MANGERON, L. E. KRIVOŞEIN, *Calcolo numerico delle soluzioni di una classe di equazioni integro-differenziali non lineari a derivate totali nel senso di Picone*. VII Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana. Genova, 30 settembre–5 ottobre 1963. Sunti delle comunicazioni.

[7] D. MANGERON, L. E. KRIVOŞEIN, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore*, «Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat.», ser. 8ª, XXXIV, *2*, 123–129 (1963).

[8] D. MANGERON, L. E. KRIVOŞEIN, *Résolution des équations intégro-différentielles par la méthode polynomiale*, «Mathematica», Cluj, *4* (27), 16 pp. (1962).

[9] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Rešenie odnogo klassa graničnyh zadač* (*Risoluzione di una classe di problemi al contorno*), «Revue de Math. pures et appl.», Acad. R.P.R., VII, 4, 603–615 (1962).

[10] S. GOLAB, *Sur un problème concernant les approximations successives de la solution d'une équation intégro-différentielle de la théorie du criblage*. Colloque d'approximation des fonctions, avec applications au calcul numérique. Cluj, 15–19.XI.1963, pp. 10–11.

[11] GUERNSEY R. L., *Kinetic theory of quantum plasmas*, «Phys. Rev.», 127, 5, 1446–1452 (1962).

[12] R. DE POSSEL, *Analyse numérique et la programmation à la Faculté des Sciences de Paris*. Colloque d'approximation des fonctions, avec applications au calcul numérique. Cluj. 15–19.XI.1963.

[13] L. E. KRIVOŠEIN, *Čislennoe rešenie zadači Cauchy dlia odnogo classa integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Risoluzione numerica del problema di Cauchy per una classe di equazioni integro-differenziali*), «Materialy XI Naučn. konferentzii prof.-prepodavat. sostava Fiz.-Matem. fak. Kirg. univ. Sekt. matem.», Frunze, 20–23 (1963).

[14] NOŽIČKA F., *Die Fundamentalinvarianten einer Weltlinie in der Minkowskischen Mechanik*, «Z. angew. Math. und Mech.», *41*, Sonderheft, 44–45 (1961).

[15] NOŽIČKA F., *Sur les contacts des hypersurfaces dans un espace affine linéaire*, «Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR», 1, 3, 337–353 (1957).

[16] RUSCIOR STEFANIA, *Sur l'interprétation géométrique d'un nombre de scalaires intervenant dans les équations des géodésiques dans l'espace de Minkowski*, «Čekhoslovak Math. J.», (in stampa).

[17] RUSCIOR STEFANIA, *Correspondance par hyperplans tangents parallèles entre deux hypersurfaces réglées, dans* S_4 *affine*. «Analele ştiintifice ale Univ. Al. I. Cuza», s. n., VIII, *2* Sect. I (Mat., fiz., chim.), 369–394 (1962).

[18] CREANGA ION, RUSCIOR STEFANIA, *Surfaces réglées à génératrices respectivement parallèles*, «St. şi cerc. ştiint.», Acad. R.P.R., fil. Iaşi, III, 1–4, 15–42 (1952).

[19] D. MANGERON, *The integral equations method in nonlinear mechanics*, Proc. intern. Symposium non linear vibrations. Acad. Sci. Ukrain. SSR, Kiev, 1963, pp. 347–350.

[20] D. MANGERON, *Beiträge zur graphisch-analytische Methoden der nicht linearen Mechanik*. III. *Allgemeine Konferenz zur Dynamik der Maschinen*. Institut für Theorie der Maschinen der ČSAV. 29–31 Okt. 1963, Praha-Liblice.

[21] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat.», ser. 8ª, XXXI, *1–2*, 27–32 (1961).

[22] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Problemi di Goursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali*, «Rend. Accad. Sci. Fis. e Mat., Napoli», ser. 4ª, XXVIII, 213–224. (1961).

[23] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Approximation par les polynomes de Bernstein des solutions de certains problèmes à la frontière pour les équations intégro-différentielles d'ordre supérieur*, « G. r. Acad. Sci., Paris », *254*, 3624–3626 (1962).

[24] F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXIII, 163–213 (1954).

[25] D. MANGERON, *Sur certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. r. Acad. Sci., Paris », *204*, 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937).

[26] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*, « Rend. Accad. Sci. Fis., Mat., Napoli », ser. 4ª, II, 1–11 (1932).

[27] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », ser. 2ª, V, pp. 51–72 (1936).

[28] G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico*, « Giorn. di Mat. di Battaglini », ser. 4ª, *78*, 81–96 (1948–49).

[29] M. PICONE, G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, Tumminelli, Roma 1955, Cap. V e segg.

[30] D. MANGERON, *Équations fonctionnelles optimales relatives à une nouvelle classe de problèmes aux limites d'ordre supérieur, du type non-elliptique*. Colloque d'approximation des fonctions, avec applications au calcul numérique. Cluj, 15–19.XI.1963, pp. 11–12.

[31] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sulla risoluzione di problemi concernenti alcune classi di equazioni integro-differenziali non lineari a derivate parziali*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova » (in stampa).

[32] S. VASILACH, *Calcul opérationnel des distributions à support dans* R^n_+, $n \geq l$. *IV–V*, « Revue de Math. pures et appl. », Acad. R.P.R., VIII, *1*, 19–66 (1963).

[33] *Issledovania po integro-differentzial'nym uravneniam. II. Red. V. Y. Bykov, Akad. Nauk Kirg. SSSR, Frunze* (*Studi concernenti le equazioni integro-differenziali*) 1962.

[34] L. E. KRIVOŠEIN, *Pribležennye metody rešenia obyknovennyh integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Metodi di risoluzione con approssimazione delle equazioni integro-differenziali lineari ordinarie*). Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze 1962.