Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Ricci

Sul teorema di Carathéodory-Bohr-Banach riguardante la copertura secondo Vitali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.6, p. 401–408.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_6_401_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 dicembre 1963

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sul teorema di Carathéodory–Bohr–Banach riguardante la copertura secondo Vitali.* Nota [(*)] del Corrisp. GIOVANNI RICCI.

1. INTRODUZIONE. – La presente Nota si svolge nell'ambito del classico teorema di G. Vitali sulla copertura degli insiemi mediante successioni di insiemi chiusi a due a due disgiunti [(1)] e contiene, tra l'altro, la risposta a un problema di andamento del « parametro di regolarità » della famiglia di chiusi dalla quale si estrae la copertura : questo problema si presenta spontaneamente (vedi n. 3) nell'indirizzo di uno precedente, posto da C. Carathéodory, al quale hanno dato risposta negativa H. Bohr e S. Banach [(2)].

Sia n intero $\geqq 1$, R^n lo spazio dei punti $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ a coordinate reali. Denotiamo i punti con le lettere $x, y, z, \cdots$ e gli insiemi con le lettere E, F, G, H, I, Q, $\cdots$.

Sia E un insieme qualunque e denotiamo con δ (E), m^*E, mE rispettivamente il diametro di E, la misura esterna di E (secondo Lebesgue), la misura di E (quando E sia misurabile).

Sia $I \equiv (a_h < x < b_h ; h = 1, 2, \cdots, n)$ l'intervallo aperto generico e $\bar{I}$ la sua chiusura; denotiamo, per ogni E limitato, con $\bar{I}$ (E) il minimo inter-

(*) Presentata nella seduta del 14 dicembre 1963.

(1) Vedere per esempio G. VITALI [6]; G. VITALI–G. SANSONE [7] pp. 57–61; E. W. HOBSON [4] pp. 186–190; C. CARATHÉODORY [3] pp. 299–307; S. SAKS [5] pp. 109–112; J. C. BURKILL [2] pp. 46–47.

(2) C. CARATHÉODORY [3] p. 304, 2ª ed. pp. 689–692; S. BANACH [1].

vallo chiuso contenente E. Denotiamo con Q il « quadrato » chiuso (cioè ogni $\bar{\mathrm{I}}$ con $b_1 - a_1 = \cdots = b_h - a_h$) e con Q (E) il minimo quadrato chiuso concentrico con $\bar{\mathrm{I}}$ (E) e contenente E.

Sia Q (x, ρ) il quadrato chiuso di centro x e semidimensione ρ, Q $(x$, E) il minimo quadrato chiuso di centro x e contenente E (limitato).

Supponiamo che E contenga almeno due punti distinti (cioè sia $\delta(\mathrm{E}) > 0$); si dice *parametro di regolarità dell'insieme* E il rapporto

$$\gamma(\mathrm{E}) = m^*\mathrm{E}/m\,\mathrm{Q}(\mathrm{E}), \qquad (0 \leqq \gamma(\mathrm{E}) \leqq 1);$$

in particolare $\gamma(\mathrm{Q}) = 1$ per ogni Q. Posto $l_0 = \mathrm{Min}\,(b_h - a_h)$, $l_1 = \mathrm{Max}\,(b_h - a_h)$ risulta

$$l_0^{n-1}/l_1^{n-1} \leqq \gamma(\mathrm{I}) = \Pi\,(b_h - a_h)/l_1^n \leqq l_0/l_1 .$$

Quando E è costituito di un solo punto si pone $\gamma(\mathrm{E}) = 0$.

Consideriamo la coppia (x, E) (x può anche non appartenere ad E); si dice *parametro di regolarità della coppia* (x, E) il rapporto

$$\gamma(x, \mathrm{E}) = m^*\mathrm{E}/m\mathrm{Q}(x, \mathrm{E}), \qquad (0 \leqq \gamma(x, \mathrm{E}) \leqq 1).$$

Sia E_0 un insieme di punti ed $\mathcal{E}$ una classe infinita di insiemi E; supponiamo che, scelti comunque $x \in \mathrm{E}_0$ e $\rho > 0$, nel quadrato Q (x, ρ) siano contenuti infiniti insiemi E, appartenenti alla classe $\mathcal{E}$, ciascuno dei quali contenga x. Si dice *parametro di regolarità locale della classe* $\mathcal{E}$ *nel punto* x il numero, *funzione di* ρ

$$\beta(x, \rho) = \mathrm{Sup}\,\gamma(\mathrm{E}) \quad (\text{per } x \in \mathrm{E}, \mathrm{E} \in \mathcal{E}, \mathrm{E} \subseteq \mathrm{Q}(x, \rho)).$$

Da $\rho_1 > \rho_2$ segue $\beta(x, \rho_1) \geqq \beta(x, \rho_2)$. Si dice *parametro di regolarità puntuale della classe* $\mathcal{E}$ *nel punto* x il limite

$$\alpha(x) = \alpha(x; \mathcal{E}) = \lim_{\rho \to 0+} \beta(x, \rho).$$

Si dice *parametro di regolarità globale della classe* $\mathcal{E}$ sull'insieme E_0 (attinente alla coppia E_0, $\mathcal{E}$)

$$\gamma(\mathcal{E}) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}_0} \alpha(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}_0, \rho > 0} \beta(x, \rho).$$

Adesso consideriamo, seguendo C. Carathéodory, le coppie (x, E) con $x \in \mathrm{E}_0$, $\mathrm{E} \in \mathcal{E}$ ed x *non necessariamente contenuto in* E. Ad ogni x siano coordinati infiniti insiemi $\mathrm{E} \subseteq \mathcal{E}$, costituenti una classe parziale di $\mathcal{E}$ che denotiamo con $\mathcal{E}(x)$; sia verificata la proprietà che per ogni $x \in \mathrm{E}_0$ e per ogni $\rho > 0$ esistano infinite (x, E) con E contenuto in Q (β, ρ); allora si possono istituire le nozioni di *parametro di regolarità locale* $\beta(x, \rho)$ *della classe* $(x, \mathcal{E}(x))$ *nel punto* x, *parametro di regolarità puntuale* $\alpha(x)$ *della classe* $(x, \mathcal{E}(x))$ *nel punto* x, *parametro di regolarità globale della classe* $(\mathrm{E}_0, \mathcal{E})$ *sull'insieme* E_0

$$\beta(x, \rho) = \mathrm{Sup}\,\gamma(x, \mathrm{E}) \qquad (\text{per } \mathrm{E} \in \mathcal{E}(x), \mathrm{E} \subseteq \mathrm{Q}(x, \rho))$$

$$\alpha(x) = \alpha(x; \mathcal{E}(x)) = \lim_{\rho \to 0+} \beta(x, \rho)$$

$$\gamma(\mathcal{E}) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}_0} \alpha(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}_0, \rho > 0} \beta(x, \rho).$$

Ripetiamo che per queste definizioni non si richiede $x \in E$, ma si richiede $E \in \mathcal{E}(x)$.

2. I TEOREMI CLASSICI. – Denotiamo con la lettera F insiemi chiusi di R^n e con la lettera O insiemi aperti.

Sia E un insieme qualunque e $\mathcal{F}$ una classe di insiemi chiusi aventi misura positiva ($mF > 0$ per ogni $F \in \mathcal{F}$) siano verificate le seguenti proprietà (che sono le ipotesi classiche del teorema di copertura secondo Vitali):

(A) Per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $x \in E$ esiste almeno un chiuso $F(x, \varepsilon)$ della classe $\mathcal{F}$ che contiene x ed è contenuto nel quadrato $Q(x, \varepsilon)$; in simboli

$$F = F(x, \varepsilon) \quad ; \quad x \in F \quad , \quad F \in \mathcal{F} \quad , \quad F \subseteq Q(x, \varepsilon).$$

(B) $\gamma(\mathcal{F}) > 0$ (cioè esiste $\gamma_0 > 0$ tale che $\alpha(x) > \gamma_0$ per ogni $x \in E$; oppure: esiste una sottoclasse $\mathcal{F}_0$ di $\mathcal{F}$ per la quale vale ancora (A) e un numero $\gamma_0 > 0$ tali che sia $\gamma(F) < \gamma_0$ per ogni $F \in \mathcal{F}_0$).

Se gli F sono tutti quadrati risulta $\gamma(\mathcal{F}) = 1$ e la (B) è verificata; analogamente, se gli F sono tutte figure simili fra loro la (B) è verificata.

La proprietà di copertura di E mediante $\mathcal{F}$ (secondo Vitali) si esprime in uno dei due modi seguenti (V) e (V_∞).

(V) «Ad ogni $\varepsilon > 0$ si possono coordinare un intero $k = k(\varepsilon)$ e k chiusi $F_1, F_2, \cdots, F_k$ della classe $\mathcal{F}$, a due a due disgiunti, tali che si abbia:

$$m^*(E - \cup_1^k F_u) < \varepsilon \quad , \quad m^*(\cup_1^k F_u - E) < \varepsilon, \qquad (F_u \cap F_v = \emptyset \text{ per } u \neq v)$$

(Questa condizione si può esprimere anche mediante la differenza simmetrica o somma di Boole:

$$m^*(E \div \cup_1^k F_u) < \varepsilon) \text{»}.$$

In luogo della (V) si può considerare la seguente:

(V_∞) «Assegnato $\varepsilon > 0$, esiste una successione $F_1, F_2, \cdots, F_u, \cdots$ di chiusi appartenenti a $\mathcal{F}$, a due a due disgiunti, tale che

$$m^*(E - \cup_1^\infty F_u) = 0 \quad , \quad m^*(\cup_1^\infty F_u - E) < \varepsilon \text{»}.$$

(Si noti la dissimmetria di (V_∞)). È evidente che $(V_\infty) \Rightarrow (V)$ in ogni caso (cioè senza alcuna ipotesi su E e su $\mathcal{F}$).

Il classico teorema di Vitali è il seguente:

«*Se* E *è un insieme di misura esterna finita* (3) allora

$$(A) \cap (B) \Rightarrow (V) \Longleftrightarrow (V_\infty) \text{»}.$$

Il Carathéodory ha dato di questo teorema una formulazione lievemente diversa: ad ogni $x \in E$ si coordina una classe infinita $\mathcal{F}(x)$ di chiusi $F(x)$ (che non necessariamente contengono x) e tale che per ogni $\rho > 0$ in $Q(x, \rho)$ sono contenuti infiniti $F(x)$ ($\mathcal{F}(x)$ può essere per esempio una successione $F_v(x)$ $(v = 1, 2, 3, \cdots)$ di chiusi). Poniamo $\mathcal{F} = \cup_x \mathcal{F}(x)$, $(x \in E)$. Ciascuna delle due affermazioni (A) e (B) viene ad assumere, in questa nuova modalità,

(3) Questa condizione verrà sottintesa in ciascuno degli enunciati analoghi successivi.

una forma lievemente diversa (A′) e (B′): per esempio $F(x, \varepsilon)$ in (A) è coordinato ad x senza contenere necessariamente x; pertanto la classe $\mathfrak{F}(x)$ e la classe degli $F \in \mathfrak{F}$ contenenti x potrebbero essere disgiunte. Le due affermazioni (V) e (V_∞) rimangono inalterate. Il teorema di Vitali si può scrivere anche:

$$(A') \cap (B') \Rightarrow (V) \Longleftrightarrow (V_\infty).$$

Il Carathéodory considera le classi $\mathfrak{F}(x)$ come successioni nell'intento di precisare leggi costruttive per la copertura.

Le differenze fra (A) e (A′), (B) e (B′) assumono rilievo quando si considerino insiemi F di natura precisata, per esempio intervalli (chiusi) , oppure quadrati $\bar{Q}$ (osserviamo che $\gamma(\bar{Q}) = 1$ mentre è $\gamma(x, \bar{Q}) = 1, < 1$ secondoché x appartiene o no a $\bar{Q}$, ecc.); ancora maggiore rilievo quando $n = 1$ poiché in questo caso ogni $\bar{I}$ è un $\bar{Q}$ e quindi $\gamma(\bar{I}) = 1$ mentre $\gamma(x, \;) < 1$ può essere piccolissimo per x relativamente lontano da $\bar{I}$.

Dunque, supponiamo che i chiusi F siano intervalli (chiusi) $\bar{I}$ e distinguiamo i due casi $n = 1$, $n \geqq 2$.

Se $n = 1$ e $\mathfrak{F}$ è costituita da intervalli chiusi $\bar{I}$, essendo $\gamma(\iota) = 1$ la (B) è verificata e quindi $(A) \Rightarrow (V) \Longleftrightarrow (V_\infty)$ (la (B) può essere tralasciata!).

Se $n = 1$ e si coordina a ogni x una classe $\mathfrak{F}(x)$ di intervalli chiusi $\bar{I}$ soddisfacente (A′), la (B′) può non essere verificata. Un esempio semplicissimo di C. Carathéodory (4) mostra che (A′) non implica (V) (e neppure (V_∞)); in questo caso la (B′) non può essere tralasciata.

Sia $n \geqq 2$ e sia $\mathfrak{F}$ costituita di intervalli chiusi $\bar{I}$ soddisfacente l'ipotesi (A); vale necessariamente $(A) \Rightarrow (V)$? Precisando ancora: ad ogni $x \in E$ sia coordinata una classe $\mathfrak{F}(x)$ di intervalli $\bar{I}(x)$ concentrici col centro in x ed $\mathfrak{F} = \cup\, \mathfrak{F}(x)$ verifichi (A′) e quindi (A), vale necessariamente $(A) \Rightarrow (V)$? (cioè si può tralasciare (B)?). A questo problema, posto dal Carathéodory (5), hanno risposto negativamente H. Bohr e S. Banach dimostrando che: « Assegnato un intervallo H e un numero ε, $0 < \varepsilon < 1$, si può coordinare ad ogni $x \in H$ una successione di intervalli chiusi, concentrici col centro in x, in modo tale che l'unione di un numero finito o di una infinità numerabile di tali intervalli, a due a due disgiunti (comunque vengano estratti) abbia una misura non superiore a $\varepsilon \cdot m H$ ».

Una attenuazione della condizione (B′) che lascia valido il teorema di copertura venne data dallo stesso C. Carathéodory che sostituì alla (B′) la seguente

(B'_1) « Per ogni $x \in E$ è $\alpha(x) > 0$ »,

oppure anche la seguente (ovvia estensione):

(B'_2) « Esiste un insieme Z di misura nulla tale che sia $\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in E - Z$ ».

E ancora è $(A') \cap (B'_2) \Rightarrow (V_\infty) \Longleftrightarrow (V)$.

(4) Vedi loc. cit. (2).

(5) Vedi loc. cit. (2).

3. POSIZIONE DEL PROBLEMA. – La non validità della copertura è dovuta alla presenza di punti x nei quali $\alpha(x) = 0$, costituenti un insieme Z di misura positiva; in ciascuno di questi punti $x \in Z$, il parametro di regolarità locale $\beta(x, \rho) \to 0$ per $\rho \to 0$. Poniamoci nella condizione più favorevole di chiusi F che sono *intervalli chiusi col centro in x*; in questo caso poniamo la domanda: esiste una « lentezza sufficiente » con cui $\beta(x, \rho) \to 0$ per $\rho \to 0$, atta a garantire la copertura (secondo Vitali)? A questa domanda abbiamo risposto negativamente dimostrando il seguente:

TEOREMA I. – « Sia H un intervallo: $H \equiv (0 < x < a, 0 < y < b)$ e siano assegnati un numero $\varepsilon > 0$ e una funzione $\varphi(t)$ definita per $t > 0$, $\varphi(t) > 0$, $\varphi(t) \to 0+$ per $t \to 0+$ ($\varphi(t) \to 0+$ lentamente quanto si vuole).

Esiste una classe $\mathfrak{F}$ di intervalli chiusi $\bar{I}$ con le seguenti proprietà:

1° ad ogni $x \in H$ è coordinata una successione di intervalli $I_s(x)$ $(s = 1, 2, \cdots)$, col centro in x e il cui diametro converge a zero, cioè $\delta(I_s(x)) \to 0$ per $s \to +\infty$;

2° il parametro di regolarità locale $\beta(x, t)$ nel punto x della classe $I_s(x)$ verifica la condizione

$$\beta(x, t) = \sup_{I_s(x) \subseteq Q(x,t)} \gamma(I_s(x)) \geqq \varphi(t);$$

3° ogni successione di intervalli chiusi

$$\bar{I}(x^1), \bar{I}(x^2), \cdots, \bar{I}(x^h), \cdots \quad (\bar{I}(x^h) \in \mathfrak{F})$$

della classe $\mathfrak{F}$, a due a due disgiunti è tale che

$$\bar{I}(x^h) \subseteq H_\varepsilon \equiv (-\varepsilon < x < a + \varepsilon; -\varepsilon < y < b + \varepsilon), \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} m\, I(x^h) < \varepsilon \cdot mH = \varepsilon \cdot ab \text{ ».}$$

Osserviamo che alla « lentezza arbitraria », con la quale $\beta(x, t) \to 0$ per $t \to 0$, si accompagna la « piccolezza arbitraria » della parte di H coperta da $\bigcup_1^\infty \bar{I}(x^h)$.

4. ALTRI RISULTATI. – Poiché l'andamento della minorante infinitesima $\varphi(t)$ di $\beta(x, t)$ non consente di garantire la copertura, possono assumere interesse criteri sufficienti di fronte a una « costruzione standard » della copertura medesima. A questo scopo, consideriamo il seguente (ben noto e classico [6]) procedimento:

($\mathfrak{S}$) Siano assegnati E ed $\mathfrak{F}$ (classe di chiusi F) soddisfacenti ad (A); fissato $\varepsilon > 0$, si consideri un aperto O_ε tale che sia $E \subseteq O_\varepsilon$, $mO_\varepsilon < m^*E + \varepsilon$. Denotiamo con $\mathfrak{F}(\varepsilon)$ la parte di $\mathfrak{F}$ costituita da tutti e soli i chiusi $F \subseteq O_\varepsilon$; $\mathfrak{F}(\varepsilon)$ verifica ancora (A) (ed eventualmente condizioni come (B), $\alpha(x) > 0$ ecc.) Poiché m^*E è finita, esiste finito $\mu_1 = \operatorname{Sup} mF$ $(F \subseteq \mathfrak{F}(\varepsilon))$; scegliamo F_1

(6) Il procedimento esposto in questa forma semplice si trova per esempio in S. Saks [5], p. 109.

in guisa da avere $mF_1 > \mu_1/2$. Per induzione, scelto F_{k-1} si scelga F_k con la legge seguente: si consideri la classe dei chiusi F che verificano le condizioni seguenti

$$F \in \mathfrak{F}(\varepsilon) \quad , \quad F \cap (\cup_1^{k-1} F_u) = \emptyset$$

(cioè contenuti in O_ε e disgiunti dai precedenti $F_1, F_2, \cdots, F_{k-1}$); sia $\mu_k = \operatorname{Sup} mF$, con F in questa classe; scegliamo come F_k un insieme di questa classe in guisa da avere $mF_k > \mu_k/2$; così si continua. Due casi sono possibili: per un valore di $k+1 \geqq 2$ si verifica che la classe è vuota e allora si perviene a una sequenza finita $F_1, F_2, \cdots, F_k$ di insiemi F la cui unione è un chiuso contenente E, oppure si perviene a una successione

$$F_1, F_2, \cdots, F_k \cdots,$$

Diremo *procedimento* $(\mathfrak{S})$ quello che, partendo da $(E, \mathfrak{F}, \varepsilon)$, conduce a questa successione che, come è evidente, in generale, non è univocamente determinata.

Seguendo procedimenti del tipo di quelli usati da C. Carathéodory si può evitare l'esecuzione di infinite scelte arbitrarie.

Consideriamo la seguente condizione:

$(B_3, \mathfrak{S})$ « Sia E_k il residuo k–esimo non coperto di E, cioè $E_k = E_k(\mathfrak{S}) = E - \cup_1^k F_k$; diciamo Z l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti x pei quali $\alpha(x) = 0$. Valga la relazione di limite:

$$m^*(Z - E_k) \to 0 \quad \text{per } k \to 0 \text{»}.$$

Vale il seguente

TEOREMA II. – $(A) \cap (B_3, \mathfrak{S}) \Rightarrow (V_\infty) \Leftrightarrow (V)$.

Al fine di presentare l'enunciato di un altro criterio sufficiente per la copertura introduciamo la seguente semplice nozione.

Si dice *involucro di un insieme* E *di spessore relativo* λ, l'insieme $\tilde{E}(\lambda)$ dei punti x che distano da E per meno di $\lambda \cdot \delta(E)$.

Poiché $\cup_1^\infty F_u \subseteq O_\varepsilon$ (di misura finita) e i chiusi F_u sono a due a due disgiunti, la serie $\sum_1^\infty mF_u$ è convergente; denotiamo con $\{\lambda_u\}$ una successione per la quale $\Sigma \lambda_u^n mF_u$ sia ancora convergente (per esempio si può assumere $0 < \eta < 1$ e

$$\lambda_u^n = (mF_u + mF_{u+1} \cdots +)^{-1+\eta}$$

in base a un classico criterio del Dini). Consideriamo la seguente condizione:

$(B_4, \mathfrak{S})$. « Esistono due numeri ρ, r $(0 < \rho \leqq r)$ e una successione λ_u (con $\Sigma \lambda_u^n mF_u$ convergente) ai quali si possono coordinare infiniti interi positivi k per ciascuno dei quali vale la seguente proprietà:

Ad ogni $y \in Y = E - \cup_1^\infty F_u$ (insieme residuo) si possono associare un intero $h \geqq k+1$ e un insieme $F_k^*(y)$ (contenente y e appartenente a $\mathfrak{F}(\varepsilon)$) pei quali sono soddisfatte le seguenti condizioni :

(a) $$F_k^*(y) \cap (\cup_1^{h-1} F_u) = \emptyset \quad , \quad F_k^*(y) \cap F_h \neq \emptyset.$$

(*b*) $$y \in \overset{\Rightarrow}{F}_h(\rho\lambda_h) \quad , \quad F_k^*(y) \subseteq \overset{\Rightarrow}{F}_h(r\lambda_h)$$

(*c*) $$\gamma(F_k^*(y)) > \gamma(F_h)/\lambda_h^n \text{ ».}$$

Osserviamo che può essere scelto $\lambda_u^n \to +\infty$ per $u \to +\infty$ e quindi il rapporto fra il parametro di regolarità dell'insieme chiuso « satellite » $F_k^*(y)$ e quello dell'insieme chiuso F_h proveniente dal procedimento ($\mathfrak{S}$) può essere anche non limitato verso lo zero: in ogni caso alla (*c*) si potrebbe sostituire quella più restrittiva $\gamma(F_k^*(y)) > 1/\lambda_h^n$.

Fissata così la condizione $(B_4, \mathfrak{S})$ vale il seguente

TEOREMA III. – $(A) \cap (B_4, \mathfrak{S}) \Rightarrow (V_\infty) \Longleftrightarrow (V)$.

Si può dimostrare che questo criterio contiene come caso particolare quello classico:

$$A \cap \{\alpha(x) \geqq \alpha_0 > 0\} \Rightarrow (V_\infty) \Rightarrow (V). \qquad \text{(Vitali)}$$

Infatti, si può scegliere $\lambda_u = 2^5/\alpha_0^{1/n}$ (indipendente da u; si vedrà poi l'utilità di questa scelta!).

Scelto k intero $\geqq 1$ e $y \in Y$ esso non appartiene al chiuso $\cup_1^k F_u$ e quindi è a distanza positiva da questo chiuso. Ad y coordiniamo un $F_k^*(y)$ contenente y, disgiunto dal chiuso $\cup_1^k F_u$ e avente il parametro di regolarità abbastanza grande fra quelli per esso possibili e cioè $\gamma(F_k^*(y)) > \alpha(y)/2$; allora risulta

$$\gamma(F_k^*(y)) > \frac{\alpha(y)}{2} \geqq \frac{\alpha_0}{2} = \frac{2^{5n}}{2\lambda_u^n} > \frac{1}{\lambda_u^n} \geqq \frac{\gamma(F_u)}{\lambda_u^n},$$

e la condizione (*c*) è verificata per ogni h.

Il chiuso $F_k^*(y)$ non è elemento della successione $\{F_u\}$ costruita col procedimento ($\mathfrak{S}$) e quindi ha punti in comune con qualche F_u, con $u \geqq k+1$ (anzi si può dire che $\sum_1^\infty mF_u < mO_\varepsilon$, $\sum_1^\infty mF_u$ è convergente, $mF_u \to 0$ per $u \to +\infty$ e, se $mF_v < mF_k^*(y)/2$, in base al procedimento ($\mathfrak{S}$) risulta $mF_k^*(y) \cap$ $\cap F_u \neq \emptyset$ per qualche $u < v$). Diciamo $h = h(k)$ il minimo indice per cui $F_k^*(y) \cap F_h \neq \emptyset$; risulta $h \geqq k+1$ e sono verificate le condizioni (*a*).

Adesso dimostreremo che sono soddisfatte anche le condizioni (*b*) con $\rho = r = 1$. Infatti

$$m(F_k^*(y)) = \gamma(F_k^*(y))\, mQ(F_k^*(y)) > (\alpha_0/2)\cdot\{\delta(F_k^*(y))/2\}^n$$
$$m(F_h) < 2\gamma(F_h)\cdot mQ(F_h) \leqq 2\cdot 2^n(\delta(F_h))^n$$

e tenendo conto del procedimento ($\mathfrak{S}$) abbiamo $mF_k^*(y) \leqq 2\,mF_h$. Queste tre disuguaglianze, unite alla (*c*) conducono subito a

$$\begin{aligned}\delta(F_k^*(y)) &< 2^{1+1/n}\cdot\alpha_0^{-1/n}(mF_k^*(y))^{1/n}\\ &< 2^{1+2/n}\cdot\alpha_0^{-1/n}(mF_h)^{1/n}\\ &< 2^{2+3/n}\alpha_0^{-1/n}\,\delta F_h \leqq 2^5\alpha_0^{-1/n}\,\delta F_h = \lambda_h\cdot\delta F_h.\end{aligned}$$

Questa disuguaglianza, unita al fatto che $F_k^*(y)$ e F_h hanno almeno un punto in comune ci dice che sono verificate le (*b*) con $\rho = r = 1$.

Il teorema classico è caso particolare del teorema III.

La dimostrazione dei teoremi enunciati e la presentazione di altri criteri verranno pubblicate in una Memoria a parte.

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. BANACH, *Sur le théorème de M. Vitali*, « Fundam. Mathem. », *5*, 130–136 (1924).

[2] J. C. BURKILL, *The Lebesgue integral*, Cambridge 1961.

[3] C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig 1918; 2. Aufl., Leipzig 1927.

[4] E. W. HOBSON, *Theory of functions of a real variable*, vol. I, 3ª ed., Cambridge 1927.

[5] S. SAKS, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.

[6] G. VITALI, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, « Atti R. Acc. Scienze Torino », *43*, 229–246 (1907–08).

[7] G. VITALI–G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, 3ª ed., Parte I, Bologna 1951.