
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ERCOLE DE CASTRO

Analisi matriciale della stabilità dei sistemi a retroazione. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.5, p. 321–327.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_321_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Scienze Fisiche. — *Analisi matriciale della stabilità dei sistemi a retroazione.* Nota I di ERCOLE DE CASTRO, presentata (*) dal Corrisp. G. EVANGELISTI.

PREMESSA.

Nel più generale dei casi un sistema a retroazione può essere schematizzato con l'insieme di tre *blocchi* disposti come in fig. 1, ciascun blocco rappresentando un sistema fisico il cui comportamento viene descritto da un certo numero di *variabili di ingresso* e da un certo altro numero, in generale diverso, di *variabili di uscita*.

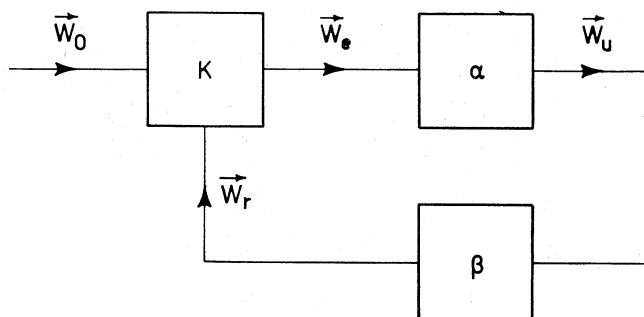


Fig. 1.

Consideriamo, ad esempio, il blocco α ed indichiamo con

$$w_e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

il *vettore* (o *matrice colonna*) definito dall'insieme delle variabili di ingresso; in modo analogo indichiamo con

$$w_u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

(*) Nella seduta del 9 novembre 1963.

in questo caso quadrata, i cui coefficienti, come è ben noto, dipendono esclusivamente dalla struttura del quadripolo α . Se si conosce l'impedenza Z della rete a valle di α , si può scrivere l'ulteriore relazione:

$$V_u = Z I_u$$

la quale, unita alle (4), consente di eliminare tre delle quattro variabili in gioco e quindi di determinare, in particolare, il rapporto

$$H_\alpha = \frac{V_u}{V_e},$$

cioè la *funzione di trasferimento* di α . Quest'ultima funzione, come è ovvio, dipende dalla struttura dell'intero sistema e non solo da α .

Attraverso simili processi di eliminazione di variabili, la descrizione del comportamento del sistema a retroazione può essere ottenuta mediante funzioni di trasferimento, invece che mediante matrici, e la verifica di stabilità, pertanto, può essere a queste ricondotta. Il calcolo delle funzioni di trasferimento, tuttavia, è spesso alquanto laborioso, proprio a cagione della eliminazione di variabili che comporta, mentre la determinazione delle matrici associate a ciascun blocco è in genere molto semplice.

Di qui l'interesse del procedimento di analisi esposto in questa nota, fondato sulla considerazione delle matrici invece che sulle funzioni di trasferimento.

Esso conduce all'esame di una espressione formalmente analoga a quella che è oggetto di indagine nel criterio di Nyquist, salvo il fatto che le funzioni di trasferimento sono sostituite da matrici e, di conseguenza, le operazioni di somma o prodotto sono da intendersi nel senso dell'algebra matriciale; al determinante di tale espressione matriciale possono applicarsi i noti criteri di verifica della stabilità, calcolandone esplicitamente gli zeri, se possibile, oppure, come nel criterio di Nyquist, facendo uso del teorema dell'indice logaritmico.

Dal punto di vista concettuale il procedimento ha pregi di eleganza e generalità; dal punto di vista pratico vale la pena rilevare che la impostazione dei calcoli, a cui esso dà luogo, risulta particolarmente appropriata all'uso delle calcolatrici elettroniche, essendo le operazioni dell'algebra matriciale di corrente programmazione.

IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA.

In via preliminare osserviamo che, senza ledere la generalità, è lecito fare riferimento al caso in cui w_e e w_u abbiano lo stesso numero di dimensioni e perciò la matrice $\|\alpha\|$ sia quadrata. Infatti, se risultasse $n > m$, alle equazioni (1) potrebbero aggiungersi altre $n - m$ equazioni fittizie, relative ad altrettante variabili fittizie di uscita $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n$ identicamente nulle, ponendo in esse eguali a zero i coefficienti delle variabili di ingresso $e_1, e_2, \dots, e_n$. In modo analogo si potrebbe ragionare se fosse $n < m$.

Le considerazioni relative al blocco α possono evidentemente essere estese alle altre parti del sistema a retroazione e pertanto risulta lecito supporre che i vettori w_e , w_u , w_r e w_o abbiano tutti lo stesso numero di dimensioni.

Il comportamento dei blocchi α e β può dunque essere definito da due matrici quadrate $\|\alpha\|$ e $\|\beta\|$ tali che:

$$(5) \quad \begin{cases} w_u = \|\alpha\| w_e \\ w_r = \|\beta\| w_u. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il blocco K (dove avviene il *confronto* fra il vettore di *riferimento* w_o ed il vettore di *retroazione* w_r), la linearità dei legami che intercedono fra le varie grandezze consente di definire una coppia di matrici $\|\lambda\|$ e $\|\mu\|$ tali che ⁽²⁾:

$$(6) \quad w_e = \|\lambda\| w_o - \|\mu\| w_r.$$

Moltiplicando *a sinistra* ambo i membri della (6) per $\|\alpha\|$ e tenendo conto delle (5), si trova:

$$w_u = \|\alpha\| \|\lambda\| w_o - \|\alpha\| \|\mu\| \|\beta\| w_u$$

da cui la relazione fra i vettori w_u e w_o :

$$(7) \quad (\|\mathbf{I}\| + \|\alpha\| \|\mu\| \|\beta\|) w_u = \|\alpha\| \|\lambda\| w_o,$$

nella quale $\|\mathbf{I}\|$ rappresenta la matrice unitaria:

$$\|\mathbf{I}\| = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{I} \end{vmatrix}.$$

(2) Se i blocchi α e β fossero quadripoli elettrici e K fosse un esapolo, si avrebbe, con ovvio significato dei simboli:

$$w_o = \begin{vmatrix} V_o \\ I_o \end{vmatrix}, \quad w_e = \begin{vmatrix} V_e \\ I_e \end{vmatrix}, \quad w_u = \begin{vmatrix} V_u \\ I_u \end{vmatrix}, \quad w_r = \begin{vmatrix} V_r \\ I_r \end{vmatrix}$$

e fra le sei grandezze V_e , I_e , V_o , I_o , V_r , I_r sussisterebbero, per la presenza di K, legami rappresentati da tre equazioni lineari ed omogenee.

Tali equazioni consentirebbero, in generale, di esprimere V_e , I_e e I_o in funzione di V_o , V_r e I_r e perciò si avrebbero, in particolare, le relazioni:

$$\begin{aligned} V_e &= \lambda_{11} V_o - \mu_{11} V_r - \mu_{12} I_r \\ I_e &= \lambda_{21} V_o - \mu_{21} V_r - \mu_{22} I_r, \end{aligned}$$

che mettono in evidenza la proprietà della matrice $\|\lambda\|$ di avere nulli i coefficienti della seconda colonna. Sarebbe facile riconoscere che questa proprietà, riflette la circostanza fisica per cui il comportamento del sistema risulta completamente determinato quando è assegnata la sola tensione V_o .

Sulla relazione (7), di cui è evidente l'analogia con la notissima formula che lega i segnali di uscita e di ingresso di un sistema a retroazione nella rappresentazione mediante funzioni di trasferimento, è fondata la presente analisi.

La matrice

$$(8) \quad \|\alpha\| \|\mu\| \|\beta\| = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{vmatrix}$$

può essere chiamata *matrice di retroazione*, per analogia col *fattore di retroazione*; essa si riduce a $\|\alpha\| \|\beta\|$ se, come talvolta avviene, $\|\mu\|$ è unitaria.

Ponendo ⁽³⁾:

$$\|\alpha\| \|\lambda\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ed indicando con $o_1, o_2, \dots, o_n$ le componenti di w_o , la relazione matriciale (7) può scriversi, per disteso, nella forma:

$$\begin{vmatrix} I + \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & I + \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & I + \rho_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \vdots \\ o_n \end{vmatrix}$$

la quale compendia il sistema di equazioni:

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n (\delta_{ik} + \rho_{ik}) u_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} o_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

essendo:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Dal sistema (9) si ricava:

$$(10) \quad u_r = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{B_{ir}}{\Delta} o_k,$$

(3) Nel caso dei sistemi elettrici quadripolari, potendosi ritenere nulli i coefficienti della seconda colonna di $\|\lambda\|$, risultano pure nulli i coefficienti della seconda colonna di $\|\alpha\| \|\lambda\|$, come è necessario perché il comportamento dell'intero circuito risulti esprimibile in funzione della sola tensione V_o . Circostanze analoghe si verificano ogni volta che le componenti di w_o non possono essere tutte considerate variabili *indipendenti*.

avendo indicato con Δ il determinante associato alla matrice

$$\|I\| + \|\alpha\| \|\mu\| \|\beta\| = \left\| \begin{array}{cccc} I + \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & I + \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & I + \rho_{nn} \end{array} \right\|$$

e con B_{ir} il complemento algebrico dell'elemento di ordine (i, r) nello stesso determinante. Affinché il sistema sia stabile, occorre che i coefficienti

$$a_{ik} \frac{B_{ir}}{\Delta},$$

funzioni della variabile complessa $s = \sigma + j\omega$, siano privi di poli nel semipiano $R[s] > 0$ e che gli eventuali poli immaginari puri siano semplici.

Se gli elementi delle matrici $\|\alpha\|$, $\|\beta\|$, $\|\lambda\|$ e $\|\mu\|$ soddisfano a tale condizione ⁽⁴⁾, la stessa cosa potrà dirsi, evidentemente, per gli elementi delle matrici $\|\alpha\| \|\lambda\|$ e $\|\alpha\| \|\mu\| \|\beta\|$, cioè per i coefficienti a_{ik} e ρ_{ik} . In questo caso gli eventuali poli instabili di $a_{ik} \frac{B_{ir}}{\Delta}$ devono essere ricercati fra gli zeri di Δ , cioè fra gli zeri del determinante della matrice

$$(11) \quad \|I\| + \|\alpha\| \|\mu\| \|\beta\|.$$

Se non si ritiene conveniente effettuare il calcolo esplicito di tali zeri, la verifica di stabilità può farsi utilizzando il teorema dell'indice logaritmico allo stesso modo come nel criterio di Nyquist: si traccia nel piano complesso il luogo degli estremi di Δ , calcolato per $s = j\omega$ ed ω variabile fra $+\infty$ e $-\infty$; il numero dei giri completi attorno all'origine compiuti dal vettore rappresentativo di Δ risulta eguale al numero degli zeri di Δ contenuti nel semipiano $R[s] > 0$, ciascuno contato tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità.

Se i coefficienti ρ_{ik} ed a_{ik} avessero poli nel semipiano $R[s] \geq 0$, oppure se Δ avesse zeri o poli sull'asse immaginario, nella interpretazione del diagramma occorrerebbero cautele del tutto analoghe a quelle necessarie quando, nell'applicazione consueta del criterio di Nyquist, le funzioni di trasferimento H_α e H_β dei singoli blocchi hanno poli in detto semipiano oppure $1 + H_\alpha H_\beta$ ha zeri o poli sull'asse immaginario.

Il procedimento cade in difetto, evidentemente, se il sistema a retroazione comprende un blocco il cui comportamento non sia definibile mediante una matrice del tipo considerato. Nel caso dei sistemi elettrici ad esempio, ciò avviene per un triodo funzionante in regime lineare, quando si trascurino le capacità interelettrodiche; infatti, indicando con V_e e con I_e la tensione e la corrente di griglia (intese come variazioni rispetto a prefissati valori di rife-

(4) Il che si verifica in modo agevole ed avviene certamente se i singoli blocchi sono intrinsecamente stabili.

rimento) e con V_u ed I_u la tensione e la corrente anodica, utilizzando le convenzioni pei segni indicate in fig. 2, si ha :

$$(12) \quad \begin{cases} I_e = 0 V_e + 0 V_u \\ I_u = -g_m V_e - g_a V_u, \end{cases}$$

essendo g_m e g_a rispettivamente la transconduttanza e la conduttanza differenziale anodica del triodo. Il sistema (12) non può essere risolto rispetto a V_u ed a I_u e pertanto non è definibile la matrice che esprime $\begin{vmatrix} V_u \\ I_u \end{vmatrix}$ in funzione di $\begin{vmatrix} V_e \\ I_e \end{vmatrix}$.

Si deve rilevare, tuttavia, che in casi del genere il calcolo delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi non presenta difficoltà e si ha perciò convenienza a svolgere l'analisi di stabilità nel modo consueto. D'altra parte, è sufficiente tenere conto delle capacità interelettrodiche del triodo (come è in effetti necessario, in generale) perché la circostanza anzidetta non abbia luogo.

Analoghe considerazioni possono farsi con riferimento a qualsiasi sistema elettrico, meccanico, elettromeccanico, ecc., ogni qual volta si trascurino le reazioni che le grandezze di *uscita* di un blocco hanno sulle grandezze di *entrata* del blocco stesso. Occorre peraltro avere presente che l'applicazione del procedimento illustrato ha interesse nei casi in cui tali semplificazioni non possono essere fatte e, di conseguenza, l'eccezione non ha importanza.

Una successiva Nota sarà dedicata ad illustrare, mediante esempi, l'utilità del procedimento stesso.