Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franca Graiff

Sull'uso di coordinate armoniche in Relatività generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 312–320.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_312_0>

Relatività. — *Sull'uso di coordinate armoniche in Relatività generale.* Nota [*] di FRANCA GRAIFF, presentata [**] dal Socio B. FINZI.

1. INTRODUZIONE. – Nella teoria della Relatività Generale si incontrano frequentemente scalari o sistemi di scalari, formati con i simboli di Christoffel e con le loro derivate ordinarie, che, per la loro forma e per le identità alle quali soddisfano, si prestano ad interessanti interpretazioni fisiche, ma offrono un grave inconveniente: non sono né invarianti, né tensori.

Per poterli usare senza contravvenire al principio di covarianza, ho usato questo metodo [1]: accanto all'Universo riemanniano V_4, riferito a coordinate (per ora generiche) x' e di metrica:

$$ds^2 = g'_{ik}(x'^i)\, dx'^i\, dx'^k$$

ho considerato una varietà pseudoeuclidea E_4, riferita a coordinate cartesiane ortogonali y^i, di metrica quindi:

$$d\sigma^2 = \delta_{ik}\, dy^i\, dy^k.$$

I simboli di Christoffel della V_4: $\left\{ {j \atop ik} \right\}'$ non sono tensori, e nemmeno le loro derivate ordinarie; lego ora la V_4 alla E_4 mediante le:

$$(*) \qquad x'^i = y^i$$

intendendo così che qualunque trasformazione di coordinate sia simultanea per le due varietà; $\left\{ {j \atop ik} \right\}'$ possono allora considerarsi, nel particolare sistema di riferimento x', come le componenti delle differenze tra i simboli di Christoffel delle due varietà: e queste hanno carattere tensoriale in entrambe.

Analogamente, le derivate ordinarie dei simboli stessi, possono considerarsi, sempre nel sistema x', come le componenti dei tensori che si ottengono dalle differenze derivandole in E_4.

Qualunque combinazione fatta con i simboli di Christoffel e con le loro derivate ordinarie rappresenterà ancora, nel riferimento x', un tensore: per avere la forma di quest'ultimo in un riferimento generico, basterà sostituire ai simboli stessi le differenze, ed alle derivate ordinarie quelle covarianti in E_4.

Dal punto di vista teorico questo procedimento è senz'altro vantaggioso, ma offre un inconveniente: infatti le (*) stabiliscono un legame tra l'Universo incurvato dalla gravitazione e quello vuoto della relatività ristretta, ma non sono di natura tensoriale: il tensore differenza dei simboli di Chri-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) F. GRAIFF, *Carattere tensoriale dell'azione einsteiniana*, questi « Rendic. », serie VIII, vol. XXX (1961).

stoffel, che da questo legame risulta definito, non coincide, in generale, con l'analogo tensore differenza che si ottiene qualora, nelle (*), si pongano al posto delle x', altre coordinate x'': le differenze tra i simboli di Christoffel dipendono quindi, oltre che dalla natura dell'Universo V_4, anche dalla scelta delle coordinate x'.

Nella presente Nota preciso questa caratteristica sia delle differenze sopra considerate che della densità di azione con esse formata e della corrispondente azione; rendo poi conto del fatto che, pur non essendo quest'ultima univocamente determinata, le equazioni di campo da essa ricavate con un principio analogo a quello di Hamilton, non risentono di questa indeterminazione.

Rilevo inoltre che, dal punto di vista pratico, è proprio la libertà di scelta del legame (*) che risulta un elemento favorevole, perché dà la possibilità di scegliere tra i sistemi x' quello che offre maggiori vantaggi nella soluzione dei vari problemi di relatività.

Considero, in particolare, il caso in cui le x' siano coordinate armoniche, e, dopo aver stabilito, in forma covariante, le condizioni di armonicità, ne considero qualche immediato vantaggio.

Sempre nello stesso ordine di idee, sviluppo invece più ampiamente il caso in cui l'Universo, incurvato da un'unica massa concentrata in un punto, possa considerarsi statico a simmetria spaziale sferica: definisco così, in forma invariantiva, le forze gravitazionali e la densità di azione, dalla quale ricavo direttamente le equazioni di campo sotto forma di sistema canonico, la cui integrazione porta alla nota soluzione di Schwartzschild.

2. FORZE GRAVITAZIONALI ED INERZIALI. – Siano x'^i ed x''^i due particolari sistemi di riferimento per la V_4; siano ρ^i_{jk} ed η^i_{jk} i tensori, differenze tra i simboli di Christoffel della V_4 e della E_4, definiti qualora le due varietà siano legate dalla (*) o dalla

$$(**) \qquad x''^i = y^i$$

rispettivamente. Si considerino allora le formule che, in un generico riferimento x^i, danno i simboli di Christoffel della V_4 per mezzo degli stessi nei riferimenti x'^i e x''^i rispettivamente, e cioè [2]:

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \left\{ {p \atop qr} \right\}' \frac{\partial x'^q}{\partial x^j} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} + \frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}$$

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \left\{ {p \atop qr} \right\}'' \frac{\partial x''^q}{\partial x^j} \frac{\partial x''^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x''^p} + \frac{\partial^2 x''^r}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x''^r}$$

dalle quali:

$$(1) \qquad \left\{ {p \atop qr} \right\}' \frac{\partial x'^q}{\partial x^j} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} =$$

$$= \left\{ {p \atop qr} \right\}'' \frac{\partial x''^q}{\partial x^j} \frac{\partial x''^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x''^p} - \left[\frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} - \frac{\partial^2 x''^r}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x''^r} \right].$$

(2) Cfr. ad esempio: B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale ed applicazioni*, Bologna 1961, p. 197.

Ricordo ora che $\left\{ {p \atop q r} \right\}'$ sono le componenti di ρ^i_{jk} nel riferimento x', che $\left\{ {p \atop q r} \right\}''$ sono le componenti di η^i_{jk} nel riferimento x'' ; la differenza tra parentesi quadra al secondo membro della (1) ha quindi carattere tensoriale, ed è precisamente la differenza tra i simboli di Christoffel di due varietà pseudoeuclidee, riferite agli stessi parametri x^i, aventi come tensori fondamentali rispettivamente:

$$\text{a}')\quad a'_{ik}(x^i) = \delta_{pq} \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} \frac{\partial x'^q}{\partial x^k} \qquad\qquad \text{a}'')\quad a''_{ik}(x^i) = \delta_{pq} \frac{\partial x''^p}{\partial x^i} \frac{\partial x''^q}{\partial x^k}$$

e come metriche quindi:

$$\text{b}')\quad ds'^2 = a'_{ik}(x^i)\, dx^i\, dx^k \qquad\qquad \text{b}'')\quad ds''^2 = a''_{ik}(x^i)\, dx^i\, dx^k .$$

Indicando con ν^i_{jk} questo tensore, per le osservazioni fatte sopra, la (1) può essere scritta:

$$(1')\qquad \rho^i_{jk} = \eta^i_{jk} - \nu^i_{jk} .$$

Cioè il legame (*) tra la V_4 e la E_4, fin che non vengono precisate le coordinate x', determina le differenze tra i simboli di Christoffel delle due varietà a meno di un tensore ν^i_{jk}, differenza, a sua volta, tra i simboli di Christoffel di due varietà pseudoeuclidee, riferite agli stessi parametri.

Qualora la trasformazione $x'' = x''(x')$ possa interpretarsi in E_4 come la formula che dà il passaggio da un osservatore inerziale che si vale di coordinate cartesiane ortogonali x' ad un altro in moto qualunque rispetto ad esso (x''), ν^i_{jk} sta a rappresentare le forze inerziali nate in E_4 per effetto del moto stesso. Per la (I') esse risultano quindi il divario tra i due sistemi di forze (gravitazionali ed inerziali) rilevate in V_4 nei riferimenti x' ed x'' e rappresentate, nel generico riferimento x^i, dai tensori ρ^i_{jk} e η^i_{jk} rispettivamente.

Se poi la trasformazione $x'' = x''(x')$ coincide con la classica trasformazione di Lorentz, ν^i_{jk} risulta naturalmente nullo.

Qualora inoltre si riesca a trovare nell'Universo incurvato un riferimento x' tale che per esso i simboli di Christoffel stiano a rappresentare la gravitazione pura e si annullino con essa, allora veramente il tensore ρ^i_{jk} rappresenta le forze gravitazionali spogliate dall'inerzia; quest'ultima, se la trasformazione $x'' = x''(x')$ rappresenta un moto dell'osservatore, sarà tutta contenuta nel tensore ν^i_{jk}.

3. AZIONE ED EQUAZIONI DI CAMPO. – Per quanto è stato detto, segue che il procedimento già definito per trasformare pseudo-tensori e funzioni in quantità di natura tensoriale, dà luogo a tensori ed invarianti dipendenti dal legame (*) scelto, quindi non univocamente determinati. Ad esempio, la densità di azione potrà essere definita nei seguenti due modi, a seconda che valga la (*) o la (**) (3):

$$\mathfrak{L}' \equiv \alpha^{ik} [\rho^j_{lk} \rho^l_{ij} - \rho^j_{lj} \rho^l_{ik}] \qquad\qquad \mathfrak{L}'' \equiv \alpha^{ik} [\eta^j_{lk} \eta^l_{ij} - \eta^j_{lj} \eta^l_{ik}]$$

essendo α^{ik} la densità del tensore fondamentale di V_4.

(3) Cfr. F. GRAIFF, loco citato.

Se però si applica lo stesso procedimento al tensore di Riemann o ai suoi contratti, si devono ottenere espressioni diverse solo formalmente, ma intrinsecamente eguali. Ad esempio, la densità del suo invariante lineare potrà essere espressa nei seguenti due modi [4]:

$$\mathfrak{R} \equiv \left[\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \alpha^{ik}{}_{/j}} \alpha^{ik}\right]_{/j} - \mathfrak{L}' \qquad \mathfrak{R} \equiv \left[\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial \alpha^{ik}{}_{//j}} \alpha^{ik}\right]_{//j} - \mathfrak{L}''$$

dove con una barra (/) e con due barre (//) si indichi derivazione covariante rispetto alle forme *b'*) e *b''*) rispettivamente.

Eguagliando le due precedenti espressioni si può rapidamente trovare il legame tra $\mathfrak{L}'$ ed $\mathfrak{L}''$:

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'' + \left[\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \alpha^{ik}{}_{/j}} \alpha^{ik}\right]_{/j} - \left[\frac{\partial \mathfrak{L}''}{\partial \alpha^{ik}{}_{//j}} \alpha^{ik}\right]_{//j}.$$

Si può allora concludere che le diverse densità di azione differiscono per la divergenza di densità vettoriali. Nell'azione quindi questo divario dà luogo ad integrali calcolati al contorno: questo spiega perché le equazioni di campo, ricavate col principio di stazionarietà dell'azione stessa, non dipendano dal legame (*). Questo spiega anche il perché Palatini abbia potuto dedurre in forma rigorosamente tensoriale, da un principio variazionale, le equazioni di campo [5].

4. COORDINATE ARMONICHE E CONDIZIONI DI ARMONICITÀ. – La libertà di scelta del sistema x' di V_4, da legare alle coordinate cartesiane ortogonali di E_4 mediante la (*), risulta senz'altro un elemento favorevole quando si vogliano affrontare problemi concreti di Relatività Generale: essa permette infatti di scegliere come riferimento x' quello che offre maggiori vantaggi per la loro soluzione.

Sia, ad esempio, questo riferimento x' tale che, per esso, i simboli di Christoffel soddisfino a determinate condizioni: ad esempio, si annullino in un punto, o lungo una linea, o risultino nulle delle loro combinazioni lineari fatte col tensore fondamentale. Dopo aver stabilito, mediante la (*), il legame tra la V_4 e la E_4, si cambi comunque il riferimento: qualunque esso sia, le differenze tra i simboli di Christoffel delle due varietà soddisferanno a quelle stesse condizioni soddisfatte, in x', dai simboli di Christoffel di V_4.

Il sostituire quindi i simboli di Christoffel con le differenze porta ad un duplice vantaggio: godere delle semplificazioni permesse dal sistema x' e lavorare in forma invariantiva, con la possibilità di scegliere un riferimento che apporti ulteriori semplificazioni.

Tra i sistemi x' usati in Relatività, quello delle coordinate armoniche risulta senz'altro privilegiato, sia per i vantaggi che esso offre nella soluzione di

(4) Cfr. A. EDDINGTON, *The mathem. Theory of Relativity*, Cambridge 1954, p. 132.

(5) A. PALATINI, *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 42 (1919).

numerosi problemi (6), sia per una certa affinità che esso possiede con le coordinate cartesiane ortogonali (7). Esso viene definito nel seguente modo:

Consideriamo nella V_4, riferita a coordinate generiche x^i, il sistema semplice di scalari: $g^{pq}\left\{ {i \atop pq} \right\}$. Per una trasformazione di coordinate $x' = x'(x)$, esso si trasforma con la legge:

$$g'^{pq}\left\{ {i \atop pq} \right\}' = -g^{lh}\left[\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^l\,\partial x^h} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}\left\{ {s \atop lk} \right\}\right]$$

cioè:

$$g'^{pq}\left\{ {i \atop pq} \right\}' \doteq -\square\, x'^i$$

dove i è un indice ordinale ed il D'Alembertiano ($\square$) è eseguito nella V_4 (8) riferita alle x^i. Allora, se le quattro funzioni $x'^i(x^k)$ hanno D'Alembertiano nullo nella V_4, nel nuovo riferimento si avrà:

$$-\sqrt{-g'}\, g'^{pq}\left\{ {i \atop pq} \right\}' \equiv \frac{\partial \alpha'^{iq}}{\partial x'^q} = 0. \tag{2}$$

Le coordinate x', per le quali la (2) risulta soddisfatta, sono dette armoniche.

Un vantaggio immediato del loro uso è che, per le (2), il tensore di curvatura contratto, in forma controvariante, assume la seguente forma semplificata (9):

$$\mathfrak{R}'^{ik} = -\frac{1}{2} g'^{pq} \cdot \frac{\partial^2 g'^{ik}}{\partial x'^q\,\partial x'^p} + g'^{pr} g'^{qs}\left\{ {k \atop pq} \right\}'\left\{ {i \atop rs} \right\}' \tag{3}$$

e la densità di azione, sempre per la (2), risulta:

$$\mathfrak{L} = \alpha'^{pq}\left\{ {j \atop lq} \right\}'\left\{ {l \atop jp} \right\}'. \tag{4}$$

Associamo ora alla V_4, riferita alle coordinate armoniche x', la E_4 riferita a coordinate cartesiane ortogonali y^i, mediante la (*). Se ora cambiamo comunque il riferimento, qualunque esso sia, risulterà:

$$g^{pq}\,\rho^i_{pq} = 0 \qquad \text{ovvero:} \quad \alpha^{ih}{}_{/k} = 0. \tag{2'}$$

La prima di queste due equazioni ha significato in ambedue le varietà, la seconda solo in E_4.

Le (2') sono tensoriali e valgono in qualunque riferimento.

(6) V. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, 1959, pp. XV, 132, 175, ecc.

(7) Cfr. V. Fock, loco citato, p. 346.

(8) Si è chiamato D'Alembertiano, ed indicato con $\square$, l'operatore divgrad., per analogia con gli spazi pseudo-euclidei, essendo la V_4 considerata a metrica indefinita. (Cfr. B. Finzi e M. Pastori, loco citato, p. 189).

(9) Cfr. V. Fock, loco citato, p. 175.

La conseguenza più importante [10] di questo procedimento è la seguente:
Tutti i metodi usati per risolvere problemi di Relatività passando attraverso le coordinate armoniche, non contraddicono il principio di covarianza.

Così il tensore di Riemann contratto, in un riferimento generico, si esprime:

$$(3') \qquad \mathfrak{R}^{ik} = -\frac{1}{2} g^{pq} g^{ik}{}_{/pq} + g^{pr} g^{qs} \rho^{k}_{pq} \rho^{i}_{rs}$$

mentre la densità gravitazionale risulta:

$$(4') \qquad \mathfrak{L} = \alpha^{pq} \rho^{j}_{lq} \rho^{l}_{jp} .$$

Inoltre, il porsi in condizioni di armonicità, il legare cioè l'Universo incurvato dalla materia con quello vuoto in modo che le (2') risultino soddisfatte, non solo non pregiudica la generalità del primo, ma non vincola il riferimento, per cui rimane ancora la possibilità di una opportuna scelta delle coordinate.

Illustro quanto ho detto con un semplice esempio.

Si cerchino le equazioni caratteristiche delle equazioni di campo della Relatività: $R_{ik} = 0$. Per le (2'), queste ultime possono porsi nella forma: $g^{pq} g^{ik}{}_{/pq} + \cdots = 0$, dove i puntini indicano termini, tutti tensoriali, nei quali non entrano le derivate seconde di g^{ik}. Se $\tau(x^i) = h$ sono le equazioni delle incognite caratteristiche, posto: $\bar{x}^0 = \tau$, $\bar{x}^1 = x^1$, $\bar{x}^2 = x^2$, $\bar{x}^3 = x^3$ si trova immediatamente [11] che, nel riferimento sopra definito, deve essere soddisfatta la:

$$\bar{g}^{00} \equiv g^{pq} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^q} = 0$$

e quindi le incognite devono soddisfare, come è noto, la:

$$g^{pq} \tau_{/p} \tau_{/q} = 0 .$$

5. FORZE GRAVITAZIONALI DOVUTE AD UNA MASSA PUNTIFORME. – È noto che, nel caso di una massa gravitante, concentrata in un punto, l'Universo corrispondente può considerarsi statico a simmetria spaziale sferica: la sua metrica può quindi esprimersi [12]:

$$(5) \qquad ds^2 = c^2 e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} dr^2 - r^2 e^{2\gamma} (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2)$$

dove α, β, γ sono funzioni della sola variabile r. È solito imporre che, per $r \to \infty$, le variabili α, β, γ tendano a zero. Qualora poi la massa, causa delle curvature, si riducesse a zero, la varietà sopra considerata deve ridursi a pseudoeuclidea.

(10) Si può anche rilevare che, operando nel senso descritto, le soluzioni delle due equazioni differenziali:

$$\alpha^{ik}{}_{/k} = 0 \quad \text{in } E_4 \quad \text{e} \quad \Box\chi = 0 \quad \text{in } V_4$$

risultano due problemi strettamente legati.

(11) Cfr., ad esempio, J. L. SYNGE, *Relativity: the general theory*, Amsterdam 1960, p. 226; M. PASTORI, *Propagazione delle azioni gravitazionali ed elettromagnetiche*, « Rend. Ist. Lomb.», 72, 509–518 (1939); B. FINZI, *Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali*, questi « Rend. », ser. VIII, vol. VI, (1949).

(12) Cfr., ad esempio, V. FOCK, loco citato, p. 188.

Viene allora spontaneo legare l'universo V_4, così definito, ad una varietà E_4, in modo tale che la metrica di quest'ultima, riferita agli stessi parametri, t, r, θ, φ, risulti:

$$d\sigma^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2) \tag{6}$$

La trasformazione di coordinate:

$$x'_0 = ct \quad ; \quad x'_1 = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \quad ; \quad x'_2 = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad x'_3 = r\cos\theta \tag{7}$$

dà alla (6) forma pseudopitagorica, non così alla (5); le x' risultano cioè cartesiane ortogonali per la E_4.

Posto: $x^0 = t$, $x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \varphi$, le componenti (diverse da zero) della densità del tensore fondamentale di V_4, in questo riferimento, sono:

$$\begin{cases} \alpha^{00} = \operatorname{sen}\theta \dfrac{r^2}{c} e^{\beta+2\gamma-\alpha} & \alpha^{11} = -\operatorname{sen}\theta\, c r^2 e^{\alpha+2\gamma-\beta} \\ \alpha^{22} = -\operatorname{sen}\theta \cdot c e^{\alpha+\beta} & \alpha^{33} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\alpha^{22} \end{cases} \tag{8}$$

e le componenti delle differenze ρ^i_{jk} tra i simboli di Christoffel delle due varietà, diverse da zero, risultano: (l'accento indica derivazione rispetto ad r)

$$\begin{cases} \rho^0_{01} = \alpha' & \rho^1_{11} = \beta' & \rho^2_{12} = \gamma' \\ \rho^1_{00} = c^2 e^{2(\alpha-\beta)}\alpha' & \rho^1_{22} = -r\,[(1 + r\gamma')\, e^{2(\gamma-\beta)} - 1] & \rho^3_{13} = \gamma' \\ & \rho^1_{33} = \operatorname{sen}^2\theta\, \rho^1_{22}. & \end{cases} \tag{9}$$

Osservo ora che l'annullarsi della massa gravitante porta come necessaria conseguenza l'annullarsi di α, β, γ ovunque, e viceversa: il tensore ρ^i_{jk} risulta in questo caso nullo. A ragione esso può quindi rappresentare le forze gravitazionali.

6. Condizioni di armonicità. – Nella particolare varietà presa in considerazione, le coordinate armoniche risultano definite a meno di una trasformazione di Lorentz [13]. Per quanto è stato precedentemente detto, esse si presentano quindi come le più idonee per il legame (*).

Se si vuole che le coordinate (7) x', cartesiane ortogonali per la E_4, risultino armoniche per la V_4, nel sistema x' stesso le α'^{ik} dovranno soddisfare le condizioni (2). In un generico riferimento, ed in particolare in quello considerato (t, r, θ, φ) le condizioni di armonicità sono le (2').

Per la particolare natura della V_4, e per il riferimento preso, tre di queste equazioni sono già identicamente soddisfatte, e precisamente:

$$\alpha^{ik}\rho^0_{ik} \equiv 0 \qquad \alpha^{ik}\rho^2_{ik} \equiv 0 \qquad \alpha^{ik}\rho^3_{ik} \equiv 0.$$

La quarta: $\alpha^{ik}\rho^1_{ik} = 0$, porta alla seguente condizione tra α, β, γ e le loro derivate [14]:

$$(\alpha + 2\gamma - \beta)' = \frac{2}{r}[e^{2(\beta-\gamma)} - 1]. \tag{10}$$

(13) Cfr. V. Fock, loco citato, p. 346.
(14) Cfr. V. Fock, loco citato, p. 188.

7. AZIONE, EQUAZIONI DI CAMPO ED IDENTITÀ DEL BIANCHI. – Calcolo ora, mediante le (8) e (9), tenendo conto delle (4') e (10), la densità (tensoriale) di azione; risulta:

$$\mathfrak{L} = cr^2 \operatorname{sen} \theta e^{(\alpha+2\gamma-\beta)} [\alpha'^2 - \beta'^2 + 2\gamma'^2 - 2\gamma' (\alpha + 2\gamma - \beta)'] \tag{11}$$

e l'azione gravitazionale (invariante) si esprime allora:

$$S = c \int_\tau r^2 \operatorname{sen} \theta e^{(\alpha+2\gamma-\beta)} [\alpha'^2 - \beta'^2 + 2\gamma'^2 - 2\gamma'(\alpha+2\gamma-\beta)'] \, dt\, dr\, d\theta\, d\varphi . \tag{12}$$

Imponendo che α, β, γ siano funzioni di r tali da rendere l'azione stazionaria, si ottengono le equazioni di campo: esse sono le equazioni di Eulero–Lagrange, qualora si assuma come Lagrangiana la (11), si consideri come sola variabile indipendente la r, e θ come parametro: sono in numero di tre, tante quante le incognite α, β, γ. Indicando queste ultime con u_1, u_2, u_3, le equazioni di campo sono allora:

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u'_k} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_k} = 0. \tag{13}$$

Per la particolare forma della Lagrangiana $\mathfrak{L}$, si può rapidamente ricavare con i soliti metodi della meccanica analitica, una quarta equazione, conseguenza delle (13), e precisamente:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dr} + \frac{2\mathfrak{L}}{r} = 0. \tag{14}$$

Questa risulta la sola identità del Bianchi, che, per il riferimento preso, e per il legame (*) stabilito, lega le equazioni di campo (13).

Essa è integrabile e risulta:

$$r^2 \mathfrak{L} = h \operatorname{sen} \theta \qquad \text{con } h \text{ costante}. \tag{14'}$$

Poiché $\operatorname{sen} \theta > 0$, si deduce che $\mathfrak{L}$ deve avere sempre lo stesso segno, ed ammettendo che l'azione S sia positiva, si conclude, per la (12), che $\mathfrak{L}$ è sempre positiva assieme ad h.

8. SISTEMA CANONICO. – Invece che esplicitare direttamente le (13), eseguo prima un cambiamento di variabili:

$$2\alpha \equiv q_1 \qquad \alpha + \beta \equiv q_2 \qquad \alpha - \beta + 2\gamma \equiv q_3 \qquad r = \frac{1}{z}$$

L'azione (12) si esprime allora:

$$S = -\int_\tau \frac{c}{2} \operatorname{sen} \theta\, e^{q_3} (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2)\, dt\, dz\, d\theta\, d\varphi \tag{12'}$$

e le equazioni di campo equivalenti alle (13) possono porsi sotto forma di sistema canonico, relativo alla Lagrangiana:

$$\mathfrak{L}' = e^{q_3} (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2). \tag{11'}$$

Posto, come di consueto:

$$p_k \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \dot{q}_k}$$

la funzione di Hamilton risulta:

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{H} = e^{-q_3}(p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)$$

ed essendo $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = 0$, risulta pure $\mathrm{H} = \text{cost.}$ (equivalente alla identità dei Bianchi prima trovata). Con un ragionamento analogo al precedente, si conclude che H è una costante positiva:

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{H} = m^2$$

Il sistema canonico risulta allora:

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} \dot{p}_1 = 0 & \dot{p}_2 = 0 & \dot{p}_3 = \mathrm{H} \\ \dot{q}_1 = 2 p_1 e^{-q_3} & \dot{q}_2 = -2 p_2 e^{-q_3} & \dot{q}_3 = -2 p_3 e^{-q_3}. \end{cases}$$

Tenendo conto, per il calcolo delle costanti di integrazione, della (16), delle solite condizioni al contorno (per $z \to 0$), della condizione di armonicità (10), il precedente sistema canonico dà luogo alla classica soluzione dello Schwartzschild:

$$ds^2 = c^2 \frac{r-m}{r+m} dt^2 - \frac{r+m}{r-m} dr^2 - (r+m)^2 [d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2].$$