Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Sul significato delle caratteristiche cinetiche e delle equazioni del Maggi per sistemi anolonomi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 303–311.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_303_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *Sul significato delle caratteristiche cinetiche e delle equazioni del Maggi per sistemi anolonomi.* Nota (*) di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

Si consideri un sistema olonomo riferito ad n coordinate lagrangiane q^k, variabili nello spazio delle configurazioni, e lo si sottoponga ad s $(s < n)$ vincoli anolonomi, tradotti da altrettante relazioni lineari nelle $\dot{q}^k$.

È noto che l'atto di moto del sistema si può caratterizzare mediante $n - s$ caratteristiche cinetiche indipendenti e che le n equazioni indefinite di movimento si possono ottenere associando alle s equazioni (differenziali del primo ordine nelle $q^k = q^k(t)$) che traducono i vincoli, $n - s$ equazioni differenziali del secondo ordine: le equazioni del Maggi.

In questa Nota mostro che, considerando in ciascun punto dello spazio delle configurazioni una opportuna n-pla di congruenze ortogonali, le caratteristiche cinetiche si possono interpretare come componenti intrinseche del vettore velocità del punto rappresentativo del sistema, secondo $n - s$ opportune direzioni di tale n-pla e le equazioni del Maggi si possono interpretare come uguaglianza fra le componenti intrinseche del vettore accelerazione dello stesso punto e quelle del vettore che caratterizza la sollecitazione attiva, sempre secondo le stesse $n - s$ direzioni. Le componenti intrinseche del vettore velocità secondo le rimanenti s direzioni della n-pla sono assegnate dalle equazioni dei vincoli. Quelle del vettore accelerazione hanno pure un semplice significato geometrico e sono collegate con una forma delle equazioni di moto dei sistemi anolonomi data dal Synge.

Quanto sopra vale sia per vincoli anolonomi fissi (quando, cioè, le equazioni che traducono i vincoli sono omogenee), sia per un caso particolare di vincoli anolonomi variabili (quando, cioè, le equazioni che traducono i vincoli non sono omogenee, ma hanno coefficienti che non dipendono esplicitamente dal tempo).

Nel caso, invece, di vincoli anolonomi genericamente variabili, l'interpretazione geometrica viene meno (ossia, vale solo istante per istante), perché la n-pla di congruenze varia, in ciascun punto dello spazio delle configurazioni, da istante ad istante.

1. VINCOLI ANOLONOMI FISSI. CARATTERISTICHE CINETICHE. – Consideriamo un sistema dinamico soggetto a vincoli fissi, di olonomia ed anolonomia.

Teniamo conto dei vincoli di olonomia riferendo il sistema ad n coordinate lagrangiane $q^1, q^2, \cdots, q^n$. Il moto del sistema potrà così essere rappre-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 novembre 1963.

sentato da quello di un punto $P = P(q^1, q^2, \cdots, q^n)$ di una varietà riemanniana V_n (spazio delle configurazioni), di metrica:

$$dl^2 = 2\,T\,dt^2 = a_{ik}\,dq^i\,dq^k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

essendo T l'energia cinetica del sistema. Le coordinate q^k, però, non sono libere, dovendo ancora soddisfare ai vincoli di anolonomia. Tali vincoli, che abbiamo supposto fissi, saranno tradotti da equazioni lineari omogenee nelle derivate $\dot{q}$ delle q rispetto al tempo; si avrà cioè:

$$(1) \qquad \underset{\nu}{A}_r\,\dot{q}^r = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \cdots, s \\ r = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix} (s < n)$$

con $\underset{\nu}{A}_r$ funzioni note delle q^k.

Risolvendo le (1), si possono esprimere le $\dot{q}^k$ mediante $n - s$ parametri indipendenti e_α che sono le caratteristiche cinetiche:

$$(2) \qquad \dot{q}^i = \sum_{s+1}^{n}{}_{\alpha}\, \xi^{i\alpha}\, e_\alpha \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Le (1) impongono al vettore velocità del punto rappresentativo P di essere ortogonale a ciascuno dei vettori $\underset{\nu}{A}_r$ e quindi, supposte le (1) indipendenti, allo spazio E_s ad s dimensioni, tangente a V_n, che tali vettori individuano in ciascun punto di V_n.

È sempre possibile sostituire gli s vettori $\underset{\nu}{\mathbf{A}}$ con s versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, mutuamente ortogonali, che individuano in ciascun punto di V_n lo stesso E_s individuato dai vettori $\underset{\nu}{\mathbf{A}}$ [1]. Si possono cioè sempre sostituire alle (1) le equazioni:

$$(3) \qquad \underset{\nu}{B}_r\,\dot{q}^r = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, s)$$

con:

$$(4) \qquad \underset{\nu}{B}_r\,\underset{\mu}{B}^r = \underset{\mu\nu}{\delta} \qquad (\underset{\mu\nu}{\delta} = 1 \text{ per } \mu = \nu\ ;\ \underset{\mu\nu}{\delta} = 0 \text{ per } \mu \neq \nu).$$

Ovviamente, le (2) sono anche soluzioni delle (3).

Consideriamo, nello spazio delle configurazioni V_n, una n-pla di congruenze ortogonali individuata in ciascun punto P dai seguenti versori: *a*) gli s versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ che individuano i vincoli; *b*) altri $n - s$ versori $\underset{\alpha}{\Lambda}$ $(\alpha = s + 1, s + 2, \cdots n)$ ortogonali fra loro ed ai precedenti (la cui scelta può essere fatta in infiniti modi) [2], tali cioè che:

$$(5) \qquad \underset{\alpha}{\Lambda}_r\,\underset{\beta}{\Lambda}^r = \underset{\alpha\beta}{\delta} \qquad \text{e} \qquad (5') \qquad \underset{\alpha}{\Lambda}_r\,\underset{\nu}{B}^r = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \cdots, s \\ \alpha, \beta = s + 1, s + 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

È noto che, approfittando delle componenti dei versori di una n-pla di congruenze ortogonali, si possono costruire dei sistemi di invarianti (compo-

(1) Cfr. J. L. SYNGE, *On the Geometry of Dynamics*, « Philos. Transactions R. Soc. of London », ser. A, *236*, 31–106 (1927).

(2) Cfr. M. PASTORI, *Sulla curvatura della direttissima nel principio di Hertz*. In corso di pubblicazione presso questi « Rendiconti ».

nenti intrinseche) atti ad individuare vettori e tensori. Così, ad esempio, per un vettore $\boldsymbol{u}$, le componenti intrinseche $\underset{i}{u}$ rispetto ad una n–pla di congruenze ortogonali di versori $\underset{i}{\lambda}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, si ottengono secondo le:

$$\underset{i}{u} = u_k \underset{i}{\lambda}^k = u^k \underset{i}{\lambda}_k .$$

Le componenti intrinseche di un vettore non sono altro che le sue proiezioni sulle direzioni della n–pla di congruenze. Poiché le (3) impongono al vettore $\boldsymbol{v}$, velocità del punto rappresentativo P, di essere ortogonale allo E_s dei versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, possiamo quindi porre:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha \underset{\alpha}{v} \underset{\alpha}{\boldsymbol{A}} \tag{6}$$

(essendo: $\underset{\nu}{v} = 0$ per $\nu = 1, 2, \cdots, s$).

Si ha pertanto:

$$\dot{q}^k \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q^k} = \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha \underset{\alpha}{v} \underset{\alpha}{\boldsymbol{A}} . \tag{7}$$

Mentre le n componenti controvarianti $\dot{q}^k$ non sono indipendenti, dovendo soddisfare gli s legami (3), le $n - s$ componenti intrinseche $\underset{\alpha}{v}$ sono invece, a priori, arbitrarie.

Dalla (6), moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\partial \mathrm{P}/\partial q^h$, si ottiene:

$$\dot{q}_h = \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha \underset{\alpha}{v} \underset{\alpha}{\Lambda}_h \tag{8}$$

da cui anche:

$$\dot{q}^k = \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha \underset{\alpha}{v} \underset{\alpha}{\Lambda}^k . \tag{8'}$$

Le (8') esprimono le $\dot{q}^k$ soluzioni della (3), in funzione di $n - s$ parametri indipendenti $\underset{\alpha}{v}$.

Osservo che, mediante una opportuna scelta delle caratteristiche cinetiche e_α, si può sempre fare in modo che i coefficienti $\xi^{i\alpha}$ della (2) soddisfino alle condizioni di ortonormalità:

$$a_{ik} \xi^{i\alpha} \xi^{k\beta} = \delta^{\alpha\beta} \text{ (3)} \qquad (\delta^{\alpha\beta} = 1 \text{ per } \alpha = \beta \ ; \ \delta^{\alpha\beta} = 0 \text{ per } \alpha \neq \beta). \tag{9}$$

Le e_α in corrispondenza alle quali la (9) è soddisfatta sono tali da far assumere all'energia cinetica T del sistema la forma canonica:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha e_\alpha^2 .$$

(3) Si possono, difatti, in infiniti modi, sostituire alle e_α altrettante loro combinazioni lineari e'_α, a coefficienti funzioni delle q, in modo da rendere soddisfatte le (9).

Ponendoci dunque nelle condizioni in cui vale la (9), il confronto delle (8′) con le (2) permette le identificazioni:

$$\underset{\alpha}{v} = e_\alpha \tag{10}$$

$$\underset{\alpha}{\Lambda^h} = \xi^{h\alpha}. \tag{11}$$

Possiamo cioè interpretare le $n - s$ caratteristiche cinetiche e_α, che danno all'energia cinetica la forma canonica, come le componenti intrinseche non identicamente nulle del vettore velocità del punto rappresentativo P nello spazio delle configurazioni, rispetto ad una n–pla di congruenze ortogonali [4], s delle quali siano individuate dai versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ che caratterizzano i vincoli. Tali componenti si riducono soltanto ad $n - s$, essendo nulle quelle secondo i versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$.

I coefficienti $\xi^{h\alpha}$, poi, non sono altro che le componenti controvarianti in V_n di $n - s$ versori $\underset{\alpha}{\boldsymbol{\Lambda}}$ ortogonali fra loro ed agli s versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$.

2. Le equazioni del Maggi.

– Ricordiamo le equazioni di moto di un sistema anolonomo nella forma del Maggi [5].

Esse sono:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k}\right)\xi^{k\alpha} = Q_k\,\xi^{k\alpha} \tag{12}$$

dove Q_k sono le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva e, nel caso in esame di vincoli fissi, $\xi^{k\alpha}$ sono i coefficienti delle (2).

Dette a_k le componenti covarianti in V_n del vettore accelerazione del punto rappresentativo P, le (12) si scrivono anche:

$$a_k\,\xi^{k\alpha} = Q_k\,\xi^{k\alpha}. \tag{12′}$$

(4) Se anche si considerano $\xi^{i\alpha}$ non soddisfacenti le (9), si possono ancora interpretare le e_α come componenti intrinseche di $\boldsymbol{v}$ secondo una opportuna n–pla di congruenze, individuata dagli s versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ e da $n - s$ vettori $\overset{\beta}{\boldsymbol{\lambda}}$ ortogonali ai $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, ma non necessariamente ortogonali fra loro.

Precisamente, considerati gli $n - s$ vettori $\underset{\alpha}{\lambda^i} = \xi^{i\alpha}$, ortogonali allo E_s individuato dai $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, si costruiscono gli $n - s$ vettori: $\overset{\beta}{\lambda^i} = \sum_{s+1}^{n}{}_\alpha \underset{\alpha}{\lambda^i}\overset{\alpha\beta}{g}$ (essendo $\overset{\alpha\beta}{g}$ i reciproci dei $\underset{\alpha\beta}{g} = \underset{\alpha}{\boldsymbol{\lambda}} \times \underset{\beta}{\boldsymbol{\lambda}}$). Dette $\overset{\beta}{v} = \boldsymbol{v} \times \overset{\beta}{\boldsymbol{\lambda}}$ le componenti intrinseche di $\boldsymbol{v}$ secondo i $\overset{\beta}{\boldsymbol{\lambda}}$, si ha ancora: $\boldsymbol{v} = \sum_{s+1}^{n}{}_\beta \overset{\beta}{v}\underset{\beta}{\boldsymbol{\lambda}}$.

Le caratteristiche cinetiche e_β si identificano allora con le $\overset{\beta}{v}$.

(Per l'uso di componenti intrinseche secondo una n–pla di congruenze non ortogonali, cfr. G. Ferrarese, *Sulle equazioni di moto di un sistema soggetto a un vincolo anolonomo mobile*, « Rend. Matem. » (3–4), vol. 22 (1963).

(5) Cfr. ad esempio, B. Finzi, *Meccanica Razionale*. Zanichelli, Bologna (1959), vol. II; Finzi–Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Zanichelli, Bologna (1962).

Sempre riferendoci al caso in cui le $\xi^{k\alpha}$ verificano la (9) e quindi si identificano con le componenti dei versori $\underset{\alpha}{\Lambda}$, le equazioni (12′) diventano:

$$a_k \underset{\alpha}{\Lambda^k} = Q_k \underset{\alpha}{\Lambda^k}$$

ossia:

$$\underset{\alpha}{a} = \underset{\alpha}{Q} \qquad (\alpha = s+1\,, s+2\,, \cdots, n). \tag{13}$$

Le equazioni del Maggi, per vincoli fissi, si interpretano dunque, nello spazio delle configurazioni, come uguaglianza delle componenti intrinseche del vettore accelerazione del punto rappresentativo e del vettore che caratterizza la sollecitazione attiva, secondo una qualunque $(n-s)$-pla di direzioni tangenti alla V_n ed ortogonali fra loro ed allo E_s individuato dai vincoli anolonomi [6].

3. LE ALTRE COMPONENTI DEL VETTORE ACCELERAZIONE. – Mentre il vettore $\boldsymbol{v}$ è individuato dalle sole componenti intrinseche $\underset{\alpha}{v}$ (essendo $\underset{\nu}{v} = 0$), il vettore $\boldsymbol{a}$ accelerazione del punto rappresentativo ha componenti intrinseche diverse da zero anche secondo le direzioni dei versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$.

Per determinare tali componenti, riprendiamo le equazioni (3) dei vincoli anolonomi che si possono anche scrivere:

$$\underset{\nu}{\mathbf{B}} \times \boldsymbol{v} = 0 \qquad (\nu = 1\,, 2\,, \cdots, s). \tag{3′}$$

Derivando le (3′) rispetto al tempo otteniamo:

$$\boldsymbol{a} \times \underset{\nu}{\mathbf{B}} + \boldsymbol{v} \times \frac{d\underset{\nu}{\mathbf{B}}}{dt} = 0$$

ossia:

$$\underset{\nu}{a} = -\boldsymbol{v} \times \underset{\nu}{\mathbf{B}}_{/k}\, \dot{q}^k = -\underset{\nu}{B}_{h/k}\, \dot{q}^h \dot{q}^k\,. \tag{14}$$

Poniamo:

$$\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt} = \frac{dq^k}{dl}\,\frac{dl}{dt}$$

dove dl è l'elemento d'arco di traiettoria e quindi dq^k/dl individua il versore della direzione del movimento. Le (14) si possono anche scrivere:

$$\underset{\nu}{a} = -v^2 \underset{\nu}{B}_{h/k} \frac{dq^h}{dl}\,\frac{dq^k}{dl}\,. \tag{14′}$$

Le (14′) mettono in evidenza un semplice significato geometrico-cinematico delle componenti $\underset{\nu}{a}$: ogni componente $\underset{\nu}{a}$ (secondo la direzione del generico versore $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$) uguaglia il prodotto del quadrato del modulo della velocità

(6) Vale anche qui l'osservazione della nota (4).

per il coefficiente di rotazione del Ricci relativo alla direzione del versore $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ ed alla direzione del movimento [7].

Osserviamo inoltre che le n equazioni ottenute associando le (14) alle (13) si possono interpretare come le proiezioni sulla n–pla di congruenze ortogonali di versori $\underset{\alpha}{\mathbf{\Lambda}}$ e $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ dell'equazione vettoriale di moto del punto rappresentativo P:

$$a = \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Phi} \tag{15}$$

essendo: $\mathbf{Q} = Q^k \frac{\partial P}{\partial q^k} = \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha \underset{\alpha}{Q} \underset{\alpha}{\mathbf{\Lambda}} + \sum_{1}^{s} {}_\nu \underset{\nu}{Q} \underset{\nu}{\mathbf{B}}$ il vettore di V_n che rappresenta la sollecitazione attiva e $\boldsymbol{\Phi}$ (reazione dei vincoli anolonomi) un vettore, appartenente allo E_s dei versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, di componenti intrinseche:

$$\underset{\alpha}{\Phi} = 0 \quad ; \quad \underset{\nu}{\Phi} = -\underset{\nu}{Q} - \underset{\nu}{B}_{h/k}\, \dot{q}^h \dot{q}^k .$$

Ritroviamo così un risultato del Synge che ha dimostrato che un sistema anolonomo a vincoli fissi, la cui configurazione è individuata, ad ogni istante, dalla conoscenza di n coordinate lagrangiane, è equivalente ad un sistema olonomo ad n gradi di libertà che, oltre alla sollecitazione attiva, sia soggetto ad una ulteriore sollecitazione appartenente allo E_s individuato dai versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ che caratterizzano i vincoli anolonomi [8].

Se anzi prendiamo le equazioni di moto del sistema nella forma data dal Synge:

$$a^k = Q^k - \sum_{1}^{s} {}_\nu (\underset{\nu}{B}_m Q^m + \underset{\nu}{B}_{m/n}\, \dot{q}^m \dot{q}^n)\, \underset{\nu}{B}^k \tag{16}$$

e le poniamo in forma intrinseca rispetto alla solita n–pla di congruenze ortogonali di versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ e $\underset{\alpha}{\mathbf{\Lambda}}$, otteniamo precisamente le equazioni (14) e (13).

4. VINCOLI ANOLONOMI VARIABILI. – Consideriamo ora il caso di vincoli anolonomi variabili e continuiamo a supporre fissi i vincoli olonomi in modo da poter ancora operare nello spazio delle configurazioni.

Le equazioni che traducono i vincoli anolonomi non sono più omogenee ed hanno la forma:

$$\underset{\nu}{A}_k\, \dot{q}^k + \underset{\nu}{\alpha} = 0 \tag{17}$$

dove i coefficienti $\underset{\nu}{A}_k$ ed $\underset{\nu}{\alpha}$ sono, in generale, funzioni note delle q^k e di t.

Se ne deduce:

$$\dot{q}^i = \sum_{s+1}^{n} {}_\alpha\, \xi^{i\alpha} e_\alpha + \eta^i \tag{18}$$

(7) Cfr. M. PASTORI, loco cit.

(8) Cfr. J. L. SYNGE, loco cit. Cfr. pure: C. AGOSTINELLI, *Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane*, « Boll. U.M.I. », ser. III, 1–9 (1956).

a) Riferiamoci dapprima ad un caso particolare. Supponiamo, precisamente, che i coefficienti delle (17), e quindi anche delle (18), non dipendano esplicitamente dal tempo [9].

Le (17) impongono che il vettore $\boldsymbol{v}$ velocità del punto rappresentativo abbia proiezioni assegnate $(-\underset{\nu}{\alpha})$ sugli s vettori $\underset{\nu}{\mathbf{A}}$; esse assegnano, cioè, in ciascun punto di V_n, la proiezione del vettore $\boldsymbol{v}$ sullo spazio E_s individuato dai vettori $\underset{\nu}{\mathbf{A}}$.

Introducendo, come al paragrafo 1, n versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ ortogonali fra loro e che individuano in ciascun punto lo stesso E_s individuato dai vettori $\underset{\nu}{\mathbf{A}}$, possiamo sostituire alle (17) le:

$$\underset{\nu}{B}_k \dot{q}^k + \underset{\nu}{b} = 0 \tag{19}$$

Considerata ancora, in ciascun punto di V_n, una n-pla di versori ortogonali $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ e $\underset{\alpha}{\Lambda}$, le (19) dicono che:

$$\underset{\nu}{v} = -\underset{\nu}{b}. \tag{20}$$

Possiamo quindi porre:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{s+1}^{n}{}_{\alpha}\, \underset{\alpha}{v} \underset{\alpha}{\Lambda} - \sum_{1}^{s}{}_{\nu}\, \underset{\nu}{b} \underset{\nu}{\mathbf{B}}$$

ossia:

$$\dot{q}^k = \sum_{s+1}^{n}{}_{\alpha}\, \underset{\alpha}{v} \underset{\alpha}{\Lambda}^k - \sum_{1}^{s}{}_{\nu}\, \underset{\nu}{b} \underset{\nu}{B}^k. \tag{21}$$

Osservo che, con una opportuna scelta delle caratteristiche e_α, si può sempre fare in modo che i coefficienti $\xi^{i\alpha}$ delle (18) soddisfino le condizioni di ortonormalità (9) ed inoltre η^i soddisfi le condizioni [10]:

$$a_{ik}\, \xi^{k\alpha}\, \eta^i = 0. \tag{22}$$

(9) Ciò si verifica, ad esempio, per una sfera che rotola senza strisciare su un piano che trasla o ruota uniformemente muovendosi in se stesso. Se il piano trasla uniformemente in una direzione non appartenente al piano stesso, le equazioni dei vincoli anolonomi hanno ancora i coefficienti che non dipendono esplicitamente dal tempo; ma, contrariamente alla nostra ipotesi, diventano mobili i vincoli olonomi.

(10) La (18), difatti, è somma della soluzione generale del sistema omogeneo (1) (corrispondente al sistema completo (17)) e di una soluzione particolare η^i del sistema (17). (Cfr. ad esempio: M. PICONE-G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, Tumminelli, Roma (1954), vol. I, p. 44).

Presa quindi la soluzione: $\dot{q}^i = \sum_{s+1}^{n}{}_{\alpha}\, \xi^{i\alpha} e_\alpha + \eta^i$, coi coefficienti $\xi^{i\alpha}$ soddisfacenti le (9), se η^i non soddisfa le (22), se cioè: $a_{ik}\, \xi^{k\alpha} \eta^i = \gamma^\alpha$, si può assumere come soluzione particolare la: $\eta'^i = \eta^i - \sum_{s+1}^{n}{}_{\beta}\, \xi^{i\beta} \gamma_\beta$.

Le e_α in corrispondenza alle quali valgono le (9) e le (22) sono tali da far assumere all'energia cinetica del sistema la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s+1}^{n} {}_{\alpha}\, e_\alpha^2 + a_{ik}\, \eta^i \eta^k . \tag{23}$$

Ponendoci dunque nelle condizioni in cui le (9) e le (22) sono verificate, il confronto delle (18) con le (21) permette ancora le identificazioni:

$$\underset{\alpha}{v} = e_\alpha \quad ; \quad \underset{\alpha}{\Lambda}^k = \xi^{k\alpha}$$

ed inoltre:

$$-\sum_{1}^{s} {}_{\nu}\, \underset{\nu}{b} \underset{\nu}{B}^k = \eta^k . \tag{24}$$

Possiamo cioè interpretare ancora le caratteristiche cinetiche e_α che danno all'energia cinetica la forma canonica (23), come le componenti intrinseche del vettore velocità del punto rappresentativo P secondo una $(n - s)$–pla di versori $\underset{\alpha}{\boldsymbol{\Lambda}}$, tangenti alla V_n ed ortogonali fra loro ed ai versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$.

I coefficienti η^k, poi, non sono altro che le componenti controvarianti del vettore $-\underset{\nu}{b}\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ che rappresenta la proiezione del vettore velocità sullo spazio E_s dei versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$.

L'interpretazione geometrica delle equazioni del Maggi, stabilita nel caso di vincoli fissi, continua pertanto a sussistere anche per vincoli anolonomi tradotti da relazioni lineari non omogenee a coefficienti che non dipendono esplicitamente dal tempo.

Quanto alle componenti $\underset{\nu}{a}$ dell'accelerazione del punto rappresentativo secondo i versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ (che si determinano ancora derivando le (19) rispetto al tempo) esse risultano:

$$\underset{\nu}{a} = -\underset{\nu}{B}_{h/k}\, \dot{q}^h \dot{q}^k - \underset{\nu}{b}_{/h}\, \dot{q}^h . \tag{25}$$

Le equazioni (25) e (13) si possono ancora interpretare come proiezioni sulla n–pla di congruenze ortogonali di versori $\underset{\alpha}{\boldsymbol{\Lambda}}$ e $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, dell'equazione vettoriale (15), dove la reazione $\boldsymbol{\Phi}$ dei vincoli anolonomi ha ora componenti intrinseche:

$$\underset{\alpha}{\Phi} = 0 \quad ; \quad \underset{\nu}{\Phi} = -\underset{\nu}{Q} - \underset{\nu}{B}_{h/k}\, \dot{q}^h \dot{q}^k - \underset{\nu}{b}_{/k}\, \dot{q}^k . \tag{26}$$

Le (26) ci ricollegano ad un risultato di Bressan [11] che ha esteso al caso di vincoli genericamente variabili il teorema affermante che i moti dinamicamente possibili per un sistema anolonomo, la cui configurazione è individuata ad ogni istante dalla conoscenza di n coordinate lagrangiane, sono anche

(11) Cfr. A. BRESSAN, *Sul moto dei sistemi anolonomi a vincoli variabili*, « Rend. Sem. Matem. Università di Padova », XXIX, 227–241 (1959).

i moti di un sistema olonomo ad n gradi di libertà soggetto, oltre che alla sollecitazione attiva, ad una ulteriore sollecitazione appartenente allo spazio individuato dai vettori che caratterizzano i vincoli anolonomi.

b) Per vincoli anolonomi genericamente variabili, quando cioè i coefficienti delle (17) dipendono esplicitamente anche dal tempo, soltanto istante per istante sussistono le considerazioni precedenti. La n–pla di versori ortogonali che permette l'interpretazione geometrica delle caratteristiche cinetiche e delle equazioni del Maggi varia, in ciascun punto di V_n, da istante ad istante.

L'immagine geometrica, pertanto, non è più altrettanto espressiva come nei casi sopra esaminati.

La stessa cosa, del resto, avviene per i sistemi soggetti a soli vincoli olonomi. Quando si passa da vincoli fissi a vincoli genericamente mobili, viene meno la visione geometrica del movimento del sistema, perché lo spazio delle configurazioni varia da istante ad istante.