Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Pastori

Sulla curvatura della «direttissima» nel principio di Hertz

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 295–302.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_295_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *Sulla curvatura della « direttissima » nel principio di Hertz.* Nota di MARIA PASTORI, presentata [*] dal Socio B. FINZI.

Il principio di Hertz o della « direttissima » afferma che per un sistema, libero da forze attive e soggetto a vincoli fissi, il moto naturale si distingue, tra tutti gli altri moti permessi dai vincoli, perché, a parità di atto di moto, rende minima la curvatura della traiettoria che dà l'immagine del fenomeno in un opportuno spazio rappresentativo euclideo: lo spazio di Hertz.

Nel caso di vincoli di olonomia, si suol aggiungere, nelle comuni trattazioni dell'argomento, che tale traiettoria è una geodetica dello spazio delle configurazioni (la ben nota varietà riemanniana immersa nello spazio di Hertz); nulla si aggiunge, per quel che mi risulta, nel caso di vincoli di anolonomia; né si determina il valore di questo minimo di curvatura che i vincoli impongono alla traiettoria e che sarebbe lo zero solo in mancanza di vincoli.

In questa Nota determino il valore di questo minimo, sia nel caso di vincoli di anolonomia, sia in quello di vincoli di olonomia, verificando in questo secondo caso la coincidenza con la legge della geodetica nello spazio delle configurazioni.

Considero da ultimo il caso in cui i vincoli vengano imposti a coordinate lagrangiane generali, variabili nello spazio delle configurazioni, anziché a coordinate cartesiane, variabili nello spazio di Hertz.

1. RICHIAMI. – Per un sistema olonomo od anolonomo, formato da N punti materiali, di masse $m_1, m_2, \cdots, m_N$ e di coordinate cartesiane $x_1 x_2, \cdots, x_{3N}$ [1], lo spazio di Hertz è uno spazio euclideo a 3 N dimensioni (S_{3N}) riferito alle seguenti coordinate cartesiane:

$$(1) \qquad y_1 = \sqrt{m_1}\, x_1 \,, y_2 = \sqrt{m_1}\, x_2 \,, y_3 = \sqrt{m_1}\, x_3 \,, y_4 = \sqrt{m_2}\, x_4 \,, \cdots, y_{3N} = \sqrt{m_N}\, x_{3N} \,.$$

Ogni configurazione del sistema è rappresentata da un punto P di tale spazio e il movimento del sistema dal movimento del punto P entro di esso. Per la (1) può porsi:

$$(2) \qquad P = P(y^\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, 3N).$$

Il principio della direttissima o di Hertz riguarda la traiettoria del punto P entro S_{3N}. Esso afferma che, in assenza di forze attive, il moto naturale si distingue tra tutti i moti compatibili coi vincoli (fissi) perché, a parità di velocità in P, rende minima la curvatura della traiettoria entro S_{3N}. Come è ben noto, questo principio può dedursi da quello di Gauss della minima costrizione

(*) Nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) Le prime tre coordinate sono da attribuirsi al primo punto, le tre successive al secondo punto e così via.

dei vincoli; infatti, invece del minimo della costrizione dei vincoli si può considerare, in assenza di forze attive, il minimo della seguente quantità:

$$\gamma = \sum_{1}^{3N}{}_{\alpha} \ddot{y}^{\alpha^2} = \ddot{P}^2. \tag{3}$$

Introducendo l'arco di traiettoria s, si ha:

$$\ddot{P} = \frac{dP}{ds}\ddot{s} + \frac{d^2 P}{ds^2}\dot{s}^2 . \tag{4}$$

Il vettore dP/ds ha la direzione della tangente alla traiettoria e modulo uno; il vettore $d^2 P/ds^2$ ha la direzione della normale principale e modulo eguale alla curvatura (prima curvatura) della traiettoria entro S_{3N}. Indicando questa curvatura con $1/r_a$, il versore tangente con $\boldsymbol{t}$ e il versore normale principale con $\boldsymbol{n}$, la (4) diviene:

$$\ddot{P} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}^2 \frac{1}{r_a}\boldsymbol{n} . \tag{4'}$$

Per la (3), indicando il modulo della velocità con u, si ha:

$$\gamma = \ddot{s}^2 + u^4 \frac{1}{r_a^2} . \tag{3'}$$

Ma, per vincoli fissi, il teorema dell'energia cinetica dà $\dot{s} = u =$ cost, $\ddot{s} = 0$. Il minimo di γ, a parità di velocità, coincide col minimo di $1/r_a^2$. Quest'ultima quantità è essenzialmente positiva; se non ci fossero vincoli, il suo minimo valore sarebbe lo zero, e il moto di P sarebbe rettilineo, oltre che uniforme. Vediamo ora che cosa rappresenta questo minimo in presenza di vincoli.

2. SISTEMI ANOLONOMI. – Riferiamo lo spazio S_{3N} a coordinate curvilinee generali $q^1 q^2 \cdots q^{3N}$, ponendo:

$$y^\alpha = y^\alpha (q^\beta) \qquad (\alpha , \beta = 1 , 2 ,\cdots, 3\,N). \tag{5}$$

Si avrà allora:

$$P = P(q^1 q^2 ,\cdots, q^{3N}) \tag{5'}$$

e

$$\gamma = a_{\alpha\beta}\, a^\alpha a^\beta \tag{6}$$

dove a^α sono le componenti controvarianti dell'accelerazione di P e $a_{\alpha\beta}$ è il tensore fondamentale di componenti:

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \frac{\partial P}{\partial q^\alpha} \times \frac{\partial P}{\partial q^\beta} . \tag{7}$$

Le componenti controvarianti della velocità sono le derivate rispetto al tempo delle coordinate generali $(\dot{q}^\alpha)$ perché si ha:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha, \tag{8}$$

e le equazioni che traducono i vincoli (fissi) sono lineari omogenee nelle $\dot{q}$. Supposto che siano in numero di $s = 3\,\mathrm{N} - n$, si avrà:

(9) $$\underset{1}{\mathrm{A}}_\alpha\, \dot{q}^\alpha = \underset{2}{\mathrm{A}}_\alpha\, \dot{q}^\alpha = \cdots \underset{s}{\mathrm{A}}_\alpha\, \dot{q}^\alpha = 0.$$

dove $\underset{\nu}{\mathrm{A}}_\alpha\ (\nu = 1\,,2\,,\cdots,s\,;\alpha = 1\,,2\,,\cdots,3\,\mathrm{N})$ sono note funzioni delle q.

Se il sistema è anolonomo, i coefficienti di ciascuna di queste equazioni non sono le derivate di una stessa funzione rispetto alle q. Consideriamo da prima questo caso. Le equazioni (9) impongono al vettore velocità di P di essere ortogonale a ciascuno dei vettori $\underset{1}{\mathrm{A}}_\alpha\,,\underset{2}{\mathrm{A}}_\alpha\,,\cdots,\underset{s}{\mathrm{A}}_\alpha$. Supposte le (9) indipendenti, questi vettori individuano un $\mathrm{S}_{3\mathrm{N}-n}$ a cui il vettore velocità deve essere ortogonale. È sempre possibile sostituire ai vettori considerati altrettanti vettori $\underset{1}{\mathrm{B}}_\alpha\,,\underset{2}{\mathrm{B}}_\alpha\,,\cdots,\underset{s}{\mathrm{B}}_\alpha$ che siano a due a due ortogonali ed unitari [2], il che equivale a sostituire alle (9) le seguenti equazioni:

(9') $$\underset{1}{\mathrm{B}}_\alpha\, \dot{q}^\alpha = \underset{2}{\mathrm{B}}_\alpha\, \dot{q}^\alpha = \cdots \underset{s}{\mathrm{B}}_\alpha\, \dot{q}^\alpha = 0$$

con:

$$\underset{\mu}{\mathrm{B}}_\alpha\, \underset{\nu}{\mathrm{B}}^\alpha = \underset{\mu\nu}{\delta} \qquad (\underset{\mu\nu}{\delta} = 1 \text{ se } \mu = \nu;\ \underset{\mu\nu}{\delta} = 0 \text{ se } \mu \neq \nu)$$

È stato dimostrato che, in presenza di sollecitazione attiva, individuata dal vettore di componenti controvarianti Q^α, le equazioni di moto del sistema si possono mettere sotto la forma seguente [3]:

(10) $$\begin{aligned} a^\alpha = \mathrm{Q}^\alpha &- (\underset{1}{\mathrm{B}}_\beta\, \mathrm{Q}^\beta + \underset{1}{\mathrm{B}}_{\beta/\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma)\, \underset{1}{\mathrm{B}}^\alpha \\ &- (\underset{2}{\mathrm{B}}_\beta\, \mathrm{Q}^\beta + \underset{2}{\mathrm{B}}_{\beta/\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma)\, \underset{2}{\mathrm{B}}^\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &- (\underset{s}{\mathrm{B}}_\beta\, \mathrm{Q}^\beta + \underset{s}{\mathrm{B}}_{\beta/\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma)\, \underset{s}{\mathrm{B}}^\alpha\,. \end{aligned}$$

La (10) mostra che il sistema si muove come se, oltre alla sollecitazione attiva, ci fosse una sollecitazione addizionale appartenente allo $\mathrm{S}_{3\mathrm{N}-n}$ individuato dai vettori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ che rappresentano i vincoli, ed avente, secondo tali vettori, le componenti indicate dalle espressioni entro parentesi.

Se la sollecitazione attiva manca, le (10) diventano:

(10') $$a^\alpha = -\sum_{\nu=1}^{s} \underset{\nu}{\mathrm{B}}_{\beta/\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{q}^\gamma\, \underset{\nu}{\mathrm{B}}^\alpha = -u^2 \sum_{\nu=1}^{s} \underset{\nu}{\mathrm{B}}_{\beta/\gamma}\, \lambda^\beta\, \lambda^\gamma\, \underset{\nu}{\mathrm{B}}^\alpha$$

dove si è posto:

(11) $$\dot{q}^\beta = \frac{dq^\beta}{dt} = \frac{dq^\beta}{ds}\, \frac{ds}{dt} = \lambda^\beta\, u\,.$$

(2) Cfr. J. L. SYNGE, *On the Geometry of Dynamics*, «Philos. Transactions R. Soc. of London», S. A, *236*, 31–106 (1927), Cap. I, § 3.8.

(3) J. L. SYNGE, loco cit. Cfr. pure C. AGOSTINELLI, *Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane*, «Bollet. U.M.I.», ser. III, Anno XI, 1–9 (1956).

Tenendo conto del fatto che i vettori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ sono ortogonali tra loro ed unitari, si trova allora per la (6):

$$\gamma = \sum_{1}^{s}{}_{\nu} (\underset{\nu}{B}_{\beta/\gamma}\, \dot{q}^{\beta}\, \dot{q}^{\gamma})^2 = u^4 \sum_{1}^{s}{}_{\nu} (\underset{\nu}{B}_{\beta/\gamma}\, \lambda^{\beta}\, \lambda^{\gamma})^2 . \tag{12}$$

È questo il valore minimo di γ perché esso è stato dedotto dalle equazioni del moto in assenza di forze attive. Il suo primo fattore u^4 dipende dal modulo della velocità, che è costante in virtù del teorema dell'energia; il secondo fattore dipende esclusivamente dai vincoli e dalla direzione del moto: tutte quantità prefissate. Precisamente il secondo fattore è una somma di quadrati di quegli invarianti che si presentano nello studio dei sistemi di congruenze e che vennero chiamati dal Ricci « coefficienti di rotazione » [4]. Possiamo infatti considerare una 3 N–pla di congruenze ortogonali individuata in ogni punto di S_{3N} dai seguenti versori: *a*) gli s versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$, di componenti covarianti $\underset{\nu}{\lambda}_{\beta} = \underset{\nu}{B}_{\beta}$ ($\beta = 1, 2, \cdots, 3N$; $\nu = 1, 2, \cdots, s$) e di componenti controvarianti $\underset{\nu}{\lambda}^{\alpha}$; *b*) altri n versori, ortogonali tra loro e ai precedenti, di componenti controvarianti $\underset{s+1}{\lambda^{\alpha}}, \underset{s+2}{\lambda^{\alpha}} \cdots \underset{3N}{\lambda^{\alpha}}$. La scelta di questi n versori può essere fatta in modo che il primo di essi abbia la direzione del movimento, perché tale direzione è infatti normale a tutti i $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$. Si potrà porre allora $\lambda^{\alpha} = \underset{s+1}{\lambda^{\alpha}}$, e scrivere, con le notazioni del Ricci:

$$\gamma = u^4 \sum_{1}^{s}{}_{\nu} (\gamma_{\nu, s+1, s+1})^2 . \tag{12'}$$

3. – SISTEMI OLONOMI. – Sia le equazioni di vincolo (9), sia le equazioni di movimento (10) valgono anche se il sistema è olonomo. Ma in questo caso i coefficienti di ciascuna delle (9) sono le derivate parziali di una stessa funzione rispetto alle q^{α} e, integrando, si possono sostituire alle (9) le equazioni in termini finiti delle ipersuperficie di cui i vettori $\underset{\nu}{\mathbf{A}}$ rappresentano le normali. L'intersezione di tali ipersuperficie è una varietà riemanniana V_n nella quale avviene il movimento del punto P: lo spazio delle configurazioni.

La stessa V_n può essere considerata come l'intersezione di un altro insieme di $s = 3\,N - n$ ipersuperficie, a due a due ortogonali tra loro nei punti di V_n. I versori delle normali alle ipersuperficie di questo nuovo sistema possono identificarsi coi versori $\underset{\nu}{\mathbf{B}}$ delle equazioni (9'). Con questo significato di tali versori, valgono ancora le equazioni di movimento (10) e, quando il sistema è libero da forze, la (10') e la (12). Quest'ultima dà, anche in questo caso, il valore minimo di γ. Ma gli invarianti che entrano nel secondo e terzo

(4) Cfr. ad es. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, 287 (1925).

membro della (12) hanno significato geometrico diverso e ben noto. Infatti i termini

$$\text{(13)} \qquad \underset{\nu}{B}_{\beta/\gamma}\,\dot{q}^\beta\,\dot{q}^\gamma = \frac{\underset{\nu}{b}_{\beta/\gamma}\,dq^\beta\,dq^\gamma}{dt^2} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, s)$$

rappresentano, a meno del fattore $1/dt^2$, l'insieme di quelle forme differenziali che sostituiscono, per una V_n immersa in un S_{3N}, la seconda forma fondamentale di una superficie dello spazio ordinario. Quanto al secondo fattore del terzo membro della (12), che è lo stesso per tutte le curve uscenti da P nella direzione individuata dal vettore λ^α, esso rappresenta il quadrato della «curvatura normale» in P e nella direzione del moto [5]. Indicando tale curvatura con $1/R$, si ha quindi:

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{R^2} = \sum_{\nu=1}^{s} (\underset{\nu}{b}_{\beta/\gamma}\,\lambda^\beta\,\lambda^\gamma)^2$$

e la (12) diviene:

$$\text{(12')} \qquad \gamma = u^4\,\frac{1}{R^2}\,.$$

La curvatura normale in un punto di una linea, tracciata entro V_n, è collegata con la prima curvatura $1/r_a$ della stessa, considerata come curva dello spazio in cui la V_n è immersa, e alla curvatura relativa o geodetica $1/r_g$ di essa, considerata come linea di V_n, dalla formola [6]:

$$\text{(15)} \qquad \frac{1}{r_a^2} = \frac{1}{r_g^2} + \frac{1}{R^2}\,.$$

Il principio della direttissima afferma che, nel moto naturale, libero da forze, e con una data velocità, è minimo $1/r_a^2$. Ma, nel caso di vincoli olonomi, confrontando la (3') (in cui $\ddot{s} = 0$) con la (12') e la (15), si trova che $1/r_a^2$ coincide con $1/R^2$; quindi $1/r_g = 0$ e la traiettoria del moto è una geodetica di V_n, cosa ben nota per altra via.

Dunque il minimo di γ dipende, anche nel caso di un sistema olonomo, dalla velocità in P e dai vincoli ed è precisamente, per la (12), rappresentato dalla quarta potenza del modulo della velocità per la curvatura normale nella direzione di tale velocità.

Nel caso particolare di punto vincolato a superficie fissa, il minimo di γ è rappresentato dalla quarta potenza del modulo della velocità per il quadrato della curvatura della sezione normale alla superficie nella direzione del movimento.

4. DEDUZIONE DIRETTA PER IL CASO DI SISTEMI OLONOMI. – Nel caso di sistemi olonomi si può giungere alle conclusioni precedenti anche direttamente, partendo dall'espressione del vettore $\ddot{P}$ entro lo S_{3N}.

(5) Cfr. L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton (1949), p. 165.
(6) Cfr. L. P. EISENHART, loco cit.

Incominciamo dal caso più semplice di un punto vincolato a superficie fissa. Si ha, per $\ddot{P}$ entro S_3 (7):

$$\ddot{P} = a^i \frac{\partial P}{\partial q^i} + b_{ik}\,\dot{q}^i\,\dot{q}^k\,\mathbf{N} \qquad (i\,,k = 1\,,2) \tag{16}$$

dove a^i sono le componenti controvarianti sulla superficie dell'accelerazione, q^i le coordinate curvilinee sulla superficie, b_{ik} è il secondo tensore fondamentale ed $\mathbf{N}$ il versore normale. Ma è:

$$a^i = \frac{du}{dt}\lambda^i + u^2\,\lambda^i_{/j}\,\lambda^j = \frac{du}{dt}\lambda^i + \frac{u^2}{r_g}\,\nu^i \tag{17}$$

dove ν^i rappresenta il versore normale entro la superficie. Tenendo conto della formola precedente e del teorema dell'energia, la (16) diviene:

$$\ddot{P} = \frac{u^2}{r_g}\,\nu^i \frac{\partial P}{\partial q^i} + u^2\,b_{ik}\,\lambda^i\,\lambda^k\,\mathbf{N}. \tag{16'}$$

Quadrando ed indicando con $1/R$ la curvatura della sezione normale alla superficie nella direzione del moto (individuata dalle λ^i), si trova:

$$\gamma = |\,\ddot{P}\,|^2 = u^4\left(\frac{1}{r_g^2} + \frac{1}{R^2}\right)\cdot \tag{18}$$

Ma u^4 è una costante data, per il teorema dell'energia, ed $1/R$ è pure dato perché è prefissato il vincolo e la direzione del movimento; il minimo di γ richiede dunque il minimo di $1/r_g^2$, ed essendo questa una quantità essenzialmente positiva e non soggetta più a nessuna restrizione, perché le condizioni di vincolo sono soddisfatte, essa avrà per minimo valore lo zero (la traiettoria sulla superficie sarà una geodetica). Si ha dunque per il minimo di γ:

$$\gamma = \frac{u^4}{R^2}\cdot \tag{18'}$$

Il ragionamento si può estendere a un qualunque sistema olonomo, sostituendo alla (16) l'espressione del vettore $\ddot{P}$ entro S_{3N} (8). Si ha infatti:

$$\ddot{P} = a^i \frac{\partial P}{\partial q^i} + \sum_{n+1}^{3N}{}_h\, \underset{h}{b_{ik}}\,\dot{q}^i\,\dot{q}^k\,\underset{h}{\mathbf{N}} \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,\cdots,n). \tag{19}$$

Ma per a^i vale la (17) dove naturalmente gli indici variano da 1 ad n, ν^i è il versore della normale principale entro V_n e $1/r_g$ è la prima curvatura entro V_n o curvatura relativa. Per il teorema dell'energia si trova ancora la (18) con diverso e ovvio significato dei simboli e da essa si ritrova la conclusione del paragrafo precedente.

(7) Cfr. M. PASTORI, *Sul significato meccanico della seconda forma fondamentale per una superficie e delle forme analoghe per un sistema olonomo*, « Rend. Istit. Lombardo », 95, 1012–1023 (1961).

(8) M. PASTORI, loco cit.

5. VINCOLI CHE LEGANO COORDINATE LAGRANGIANE. – Spesso i vincoli di anolonomia non legano le coordinate cartesiane dei vari punti del sistema, bensì le coordinate lagrangiane di un opportuno spazio delle configurazioni. È ciò che avviene nel classico esempio di una sfera che rotola senza strisciare sopra un piano. Le formole (5′) (7) (8) (9) (9′) sono ancora valide pur di dare agli indici variabilità da 1 ad n, se n è il numero delle coordinate lagrangiane e di tener presente che (7) rappresenterà il tensore fondamentale di una V_n, in generale, non euclidea; inoltre per il numero s delle equazioni di vincolo si avrà in questo caso $s < n$. Alle equazioni di moto si può dare ancora l'aspetto (10) [9], dove i primi membri si scriveranno, per la (17):

$$a^\alpha = \frac{du}{dt}\lambda^\alpha + u^2 \lambda^\alpha_{/\beta}\lambda^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n). \tag{20}$$

In mancanza di forze attive e per il teorema dell'energia, si avrà dunque per le equazioni di moto:

$$u^2 \lambda^\alpha_{/\beta}\lambda^\beta = -\sum_{1}^{s}{}_{\nu} \underset{\nu}{B}_{\beta/\gamma}\, \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \underset{\nu}{B}^\alpha = -u^2 \sum_{1}^{s}{}_{\nu} \underset{\nu}{B}_{\beta/\gamma}\lambda^\beta\lambda^\gamma \underset{\nu}{B}^\alpha. \tag{21}$$

Ma anche entro V_n vale il principio della minima curvatura; per esso, indicando con k la curvatura principale della traiettoria con direzione λ^α, corrispondente al moto del sistema, ponendo cioè:

$$k^2 = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{/\gamma}\lambda^\gamma\lambda^\beta_{/\delta}\lambda^\delta \tag{22}$$

si trova che k^2 è minore della corrispondente espressione per qualunque altra traiettoria con la stessa direzione e soddisfacente alle condizioni di vincolo [10]. La traiettoria corrispondente al moto del sistema rende quindi minimo, in confronto con le altre traiettorie con la stessa direzione e consentite dai vincoli, il quadrato del secondo fattore dell'ultimo membro della (21) che, salvo il diverso significato dei simboli, coincide con l'espressione (12).

Anche in questo caso possiamo considerare in V_n una ennupla di congruenze ortogonali individuata in ogni punto dai seguenti versori: *a*) gli s versori $\underset{\nu}{B}^\alpha = \underset{\nu}{\lambda}^\alpha$ che individuano i vincoli, *b*) altri $n - s$ versori ortogonali tra loro e ai precedenti. Facendo coincidere il primo di questi ultimi versori con quello che dà la direzione del movimento, si ha ancora la (12′) e si può concludere che il minimo della curvatura, imposta dai vincoli, è dato dal quadrato della velocità per la radice quadrata della somma dei quadrati di quei coefficienti di rotazione del Ricci che si scrivono:

$$\gamma_{\nu, s+1, s+1} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, s).$$

(9) J. L. SYNGE, loco cit.

(10) J. L. SYNGE, loco cit. Cap. I § 2.3, § 3.5 e § 3.6. Il Synge parla di «curvature relative a una terza curva C**». Ma poiché quest'ultima è per noi una geodetica, si può parlare di curvature, senza l'aggettivo «relative».

Rimane infine da considerare il caso in cui i vincoli imposti alle coordinate lagrangiane sono vincoli di olonomia. Ciò significa che il moto del punto rappresentativo non avviene liberamente in V_n, bensì in una V_{n-s} in essa immersa. Per una curva di quest'ultima varietà vale ancora la (15), con $1/r_a$ curvatura principale entro V_n, $1/r_g$ curvatura principale entro V_{n-s} e $1/R$ curvatura normale entro V_{n-s} [11]. Per il moto naturale in assenza di forze attive il minimo di $1/r_a$ corrisponde all'annullarsi di $1/r_g$ e quindi coincide con la curvatura normale $1/R$, che è nota, noti i vincoli e la direzione del movimento.

(11) Cfr. L. P. EISENHART, loco cit.