Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Como

La funzione di influenza per la piastra libera circolare. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 291–294.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_291_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *La funzione di influenza per la piastra libera circolare.* Nota I [(*)] di MARIO COMO, presentata dal Socio G. KRALL.

1. In una Nota a questa precedente [(1)], accennando alla funzione di Green per una piastra libera (volante) ed al suo usuale significato meccanico di spostamento G (P , P′) provocato in P da una forza $Q = 1$ in P′ (P e P′ stando sulla superficie mediana Ω), rilevai come occorresse pensare, naturalmente, all'esistenza di un vincolo isostatico, *virtuale*: tre appoggi puntuali distinti o infinitamente vicini, equivalenti ad un punto incastro. Tali vincoli nulla tolgono al carattere *libero* della piastra pur che i carichi agenti $p = p\,(\mathrm{P}')$, dei quali avvalendosi della G (P , P′) si calcola la deformata $w = w\,(\mathrm{P})$ con la quadratura

$$w\,(\mathrm{P}) = \int_{\Omega} \mathrm{G}\,(\mathrm{P}\,,\,\mathrm{P}')\,p\,(\mathrm{P}')\,d\Omega\,, \tag{1}$$

siano *equilibrati*. E ciò necessariamente per non mettere la piastra in moto, caso di Elastodinamica però assai notevole, ben più complesso della dinamica del disco libero, di cui qui non trattiamo.

Una funzione G (P , P′) siffatta si calcola assai difficilmente ed il suo intervento ha una funzione puramente simbolica, sempre efficacissima, che deriva da tutte le possibili varianti della (1). Ove si voglia proprio dare la espressione della G (P , P′), sia pure non in termini finiti, allora conviene ricorrere all'espressione bilineare formata con le *autofunzioni* della piastra vibrante, soluzioni dell'equazione

$$\Delta\Delta u = \frac{\mu\sigma^2}{\mathrm{B}}\,u \tag{2}$$

con B flessorigidezza, $\mu > 0$ densità superficiale.

Di queste, tre corrispondono all'autovalore degenere $\sigma = 0$ e sono combinazioni lineari non omogenee di x e y. Normalizzate, prendendo riferimento agli assi centrali di inerzia di Ω si scrivono:

$$u_{01} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \quad , \quad u_{02} = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{J}_y}} \quad , \quad u_{03} = \frac{y}{\sqrt{\mathrm{J}_x}}\,. \tag{3}$$

Le altre u_ρ, $\rho = 1, 2, \cdots$ sono in numero infinito corrispondenti ad autovalori reali e positivi $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_\rho^2, \cdots$; ai quali sono legate le frequenze ν_ρ, inverse dei periodi, dalle relazioni $\nu_\rho = \sigma_\rho/2\pi$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1963.
(1) Questi «Rendiconti», fascc. 3-4-5 (1962).

Le $u_{o\tau}$, $(\tau = 1, 2, 3)$, $u_\varrho\ (\rho = 1, 2, \cdots)$ costituiscono un sistema ortonormale chiuso e si hanno le relazioni:

$$(4)\qquad \int_\Omega u_{o\tau}\, u_{o\varrho}\, d\Omega = \delta_\varrho^\tau \quad , \quad \int_\Omega \mu\, u_{o\tau}\, u_\varrho\, d\Omega = 0 \quad , \quad \int_\Omega \mu u_\varrho\, u_\tau = \delta_\varrho^\tau$$

$$(\tau = 1, 2, 3\,;\, \rho = 1, 2, \cdots)\,; \qquad \delta_\varrho^\tau \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad \rho \neq \tau, \\ \neq 1 & \text{per} \quad \rho = \tau. \end{cases}$$

Tali autovalori e corrispondenti autofunzioni sono calcolati ormai per la piastra rettangolare dal Ritz e per quella circolare da Kirchoff e Lord Rayleigh [2].

La G (P , P′) si pone nella forma

$$(5)\qquad \mathrm{G}\,(\mathrm{P}\,,\,\mathrm{P}') = \Sigma_\varrho \frac{u_\varrho\,(\mathrm{P})\, u_\varrho\,(\mathrm{P}')}{\sigma_\varrho^2}$$

pur che la si adoperi nella (1) con riguardo a distribuzioni $p = p\,(\mathrm{P}')$ equilibrate, quindi ortogonali alle $u_{o\tau}$, cioè tali che

$$(6)\qquad \int_\Omega p u_{o\tau}\, d\Omega = 0 \qquad\qquad (\tau = 1, 2, 3).$$

Quanto al significato meccanico di G (P , P′) si vede subito che corrisponde alla superficie di inflessione dovuta al carico Q = 1 in $\mathrm{P}'\,(x', y')$ ed alla distribuzione piana di carico equilibrante

$$(7)\qquad q = -\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{xx'}{\mathrm{J}_y} + \frac{yy'}{\mathrm{J}_x}\right)$$

J_x, J_y essendo momenti principali di inerzia di Ω.

Siffatta distribuzione sostituisce le 3 reazioni degli appoggi puntuali distinti o il punto incastro. Essa è anche isostatica e l'espressione sopraindicata (7) risulta con le sole equazioni dell'equilibrio rigido. Se si considera una piastra galleggiante Ω, rigida, soggetta al carico Q = 1 in $\mathrm{P}'\,(x', y')$, si trova proprio come espressione della reazione del liquido, di p. s. = 1, la (7). Il vincolo piastra–liquido si può pensare bilaterale immaginando distribuito un carico uniforme sulla piastra che la tenga immersa in modo che per l'azione di Q in P′ non possa mai fuoruscire una parte di Ω. Ove si consideri il caso della piastra elastica galleggiante, la reazione del liquido risulterà proporzionale non solo allo spostamento rigido ma anche a quello elastico; e ciò costituisce un problema usuale perché proprio ad un liquido ideale ad alto peso specifico si assimila un suolo elastico. Varrà allora l'equazione, k designando il p.s. del liquido ideale, la cosidetta costante del *Ballast* (o di fondo), da 100 a 10000 volte il p.s. dell'acqua:

$$(8)\qquad \mathrm{B}\,\Delta\Delta w = p - kw$$

(2) J. M. S. RAYLEIGH, *The theory of Sound*, Dover P. Cap. X.

da cui si vede subito che, avvalendosi delle u_{01}, u_{02}, u_{03}, u_ϱ ($\rho = 1, 2, \cdots$), soluzioni della (2), lo spostamento incognito w (P) è fornito dalla combinazione lineare

$$w = A_{01} u_{01} + A_{02} u_{02} + A_{03} u_{03} + \Sigma_\varrho A_\varrho u_\varrho \tag{9}$$

dove

$$A_{01} = \frac{\int_\Omega p d\Omega}{k\sqrt{\Omega}} \quad , \quad A_{02} = \frac{\int_\Omega px\, d\Omega}{k\sqrt{J_y}} \quad , \quad A_{03} = \frac{\int_\Omega py\, d\Omega}{k\sqrt{J_x}}$$

$$A_\varrho = \frac{\int_\Omega p u_\varrho\, d\Omega}{\sigma_\varrho^2 + \frac{k}{\mu}} \, . \tag{10}$$

Sicché, pensando, al limite, p impulsiva in un intorno ω di P', così che $\lim_{\omega \to 0} \int_\omega p d\omega = 1$, si ha dalla (9) la funzione di Green per la piastra galleggiante:

$$G(P, P') = \frac{1}{k\Omega} + \frac{xx'}{kJ_y} + \frac{yy'}{kJ_x} + \Sigma_\varrho \frac{u_\varrho(P)\, u_\varrho(P')}{\sigma_\varrho^2 + \frac{k}{\mu}} \, . \tag{11}$$

2. Con riferimento al caso della piastra libera circolare, di cui qui ci si occupa, passiamo al calcolo, sino ai numeri, della corrispondente funzione di Green.

Operando con la (5), poiché autovalori e autofunzioni dipendono da due indici m e n, conviene scrivere

$$G(P, P') = \frac{\mu R^4}{B} \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(P)\, u_{mn}(P')}{(\gamma_{mn} R)^4} \tag{12}$$

ove R è il raggio della piastra e

$$\sigma_{mn}^2 = \frac{B}{\mu} \gamma_{mn}^4 \, . \tag{13}$$

In coordinate polari r, θ le espressioni delle autosoluzioni non normalizzate corrispondenti all'autovalore nullo sono

$$\bar{u}_{01} = 1 \quad , \quad \bar{u}_{02} = r \cos\theta \quad , \quad \bar{u}_{03} = r \sin\theta, \tag{14}$$

mentre quelle corrispondenti all'autovalore γ_{mn} sono:

$$\bar{u}_{mn} = \begin{cases} [J_n(\gamma_{mn} r) + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r)] \cos n\theta \\ [J_n(\gamma_{mn} r) + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r)] \sin n\theta \end{cases} \tag{15}$$

dove J_n e $I_n(\gamma r) = J_n(i\gamma r)$ sono le funzioni di Bessel di prima specie e C_{mn} è una costante, dipendente da γ_{mn}, che in seguito specificheremo (3).

(3) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. II, cap. XV. Ed. Zanichelli, Bologna 1940.

Indicate pertanto con $\varphi_{0\tau}$ e φ_{mn} le norme integrali delle (14) e (15), la (12), essendo:

(16) $$u_{0\tau} = \frac{\tilde{u}_{0\tau}}{\sqrt{\varphi_{0\tau}}} \quad , \quad u_{mn} = \frac{\tilde{u}_{mn}}{\sqrt{\varphi_{mn}}} , \qquad (\tau = 1 , 2 , 3)$$

diventa:

(17) $$\boxed{\begin{aligned} G(P , P') = \frac{\mu R^4}{B} \sum_{m,n} \frac{1}{(\gamma_{mn} R)^4 \varphi_{mn}} [J_n(\gamma_{mn} r) + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r)] \cdot \\ \cdot [J_n(\gamma_{mn} r') + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r')] (\cos n\theta \cos n\theta' + \sin n\theta \sin n\theta') \end{aligned}}$$

mentre per la piastra galleggiante si ha in conformità

(18) $$\boxed{\begin{aligned} G(P , P') = \frac{1}{k\pi R^2} + \frac{4 r r'}{k\pi R^4} (\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta') + \\ + \frac{\mu R^4}{B} \sum_{m,n} \frac{1}{\left[(\gamma_{mn} R)^4 + \dfrac{k R^4}{B}\right] \varphi_{mn}} [J_n(\gamma_{mn} r) + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r)] [J_n(\gamma_{mn} r') + \\ + C_{mn} I_n(\gamma_{mn} r')] \cdot (\cos n\theta \cos n\theta' + \sin n\theta \sin n\theta'). \end{aligned}}$$

In una Nota II, preparato l'algoritmo necessario, si forniranno esaurienti tabellazioni della (17), portate a buon fine grazie all'intervento dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ed in particolare dei suoi collaboratori dott.sse L. Cosimi e C. Mengotti-Marzolla.