Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

J. N. Distéfano

Sulla congruenza delle deformazioni in solidi viscoelastici non-omogenei

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 285–290.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_285_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *Sulla congruenza delle deformazioni in solidi viscoelastici non–omogenei.* Nota [*] di J. N. DISTÉFANO, presentata dal Socio G. COLONNETTI.

Consideriamo un solido viscoelastico isotropo, non necessariamente omogeneo, occupando uno spazio V limitato da una superficie S. Il corpo può essere soggetto a forze esterne e di massa, ed una parte della sua superficie potrà venire condizionata a non avere scorrimenti secondo certe direzioni. Si potrà inoltre supporre l'esistenza di un sistema di deformazioni impresse, tanto nell'interno come nella sua superficie.

Dopo queste premesse sia, come al solito, $\varepsilon_{ij}^{e}(t)$ la componente elastica del tensore di deformazione, $\varepsilon_{ij}^{v}(t)$ la componente viscosa e $\bar{\varepsilon}_{ij}$ un sistema di deformazioni impresse.

Come è noto [3], la condizione necessaria e sufficiente perché la deformazione totale

$$\varepsilon_{ij}^{e}(t) + \varepsilon_{ij}^{v}(t) + \bar{\varepsilon}_{ij}$$

sia congruente, è che l'equazione

$$\int_{V} [\varepsilon_{ij}^{e}(t) + \varepsilon_{ij}^{v}(t) + \bar{\varepsilon}_{ij}]\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0 \tag{1}$$

sia soddisfatta per tutti gli stati di coazione $\delta\sigma_{ij}$ del corpo.

Ora, se vogliamo che le deformazioni elastiche $\varepsilon_{ij}^{e}(t)$ siano congruenti, si dovrà verificare

$$\int_{V} \varepsilon_{ij}^{e}(t)\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0 . \tag{2}$$

Per differenza si ha subito

$$\int_{V} [\varepsilon_{ij}^{v}(t) + \bar{\varepsilon}_{ij}]\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0 . \tag{3}$$

Se supponiamo – senza restringere la generalità – che il sistema di deformazioni impresse si introduce prima d'attuare le forze esterne o di massa, e se prendiamo come origine del tempo l'istante d'applicazione del sistema di deformazioni impresse, allora la deformazione viscosa sarà nulla in questo istante e la (3) diventerà

$$\int_{V} \bar{\varepsilon}_{ij}\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0 . \tag{4}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1963.

Per differenze tra la (3) e (4) si ha

$$\int_V \varepsilon_{ij}^v(t)\,\delta\sigma_{ij}\,dV = 0 . \tag{5}$$

L'equazioni (4) e (5) vengono ad esprimere così condizioni necessarie per verificare la congruenza delle deformazioni elastiche. E sono pure condizioni sufficienti, come si dimostra sostituendo (4) e (5) nell'equazione (1). Allora, con tutta generalità si può affermare:

« *Perché in un solido viscoelastico le deformazioni elastiche siano congruenti occorre e basta che il solido sia esente da stati di coazioni e che le deformazioni viscose siano congruenti* ».

Vediamo adesso – in connessione con la teoria dell'ereditarietà lineale di Volterra – cosa comporta che le deformazioni viscose siano congruenti. Definiremo i seguenti tensori

$$\tilde{\sigma}_{ij}(t) = [-(1+\nu)\,\sigma_{ij}(t) - 3\,\nu\sigma_m(t)]\,\delta_{ij} + 2\,(1+\nu)\,\sigma_{ij}(t) \tag{6}$$

$$\tilde{\tilde{\sigma}}_{ij}(t) = [-(1+\mathcal{H}\nu)\,\sigma_{ij}(t) - 3\,\mathcal{H}\nu\sigma_m(t)]\,\delta_{ij} + 2\,(1+\mathcal{H}\nu)\,\sigma_{ij}(t) \tag{7}$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad ; \quad \mathcal{H} = \frac{f_2(t,\tau)}{f_1(t,\tau)} \; ;$$

σ_{ij} è il tensore tensione, E, ν sono il modulo di Young e di Poisson rispettivamente; $f_1(t,\tau)$ e $f_2(t,\tau)$ sono le funzioni di fluage longitudinale e trasversale.

Con questa notazione si possono scrivere le relazioni

$$\varepsilon_{ij}^e(t) = \frac{1}{E}\,\tilde{\sigma}_{ij}(t) \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij}^v(t) = \int_0^t \tilde{\tilde{\sigma}}_{ij}(\tau)\cdot f_1(t,\tau)\,d\tau . \tag{9}$$

Si riconosce subito che (8) non è altro che la legge di Hooke, e che (9) esprime la relazione d'ereditarietà lineale di Volterra tra i tensori ε_{ij}^v e σ_{ij} nel caso dell'isotropia [4].

Il significato fisico delle funzioni $f_1(t,\tau)$ e $f_2(t,\tau)$ appare chiaro in quanto si considerano le deformazioni viscose di un elemento sollecitato uniassialmente con una tensione unitaria costante. Infatti, dall'analisi della equazione (9) in un caso simile, si vede che l'integrale

$$\int_0^t f_1(t,\tau)\,d\tau \tag{10}$$

rappresenta la deformazione viscosa longitudinale dell'elemento sollecitato uniassialmente con una tensione unitaria costante applicata nell'istante $\tau = 0$.

Nella stessa maniera se verifica che l'integrale

$$\nu \int_0^t f_2(t, \tau)\, d\tau \tag{11}$$

rappresenta la contrazione laterale nel tempo, dell'elemento precedentemente considerato.

Per via di semplicità non si esplicitano le variabili x_1, x_2, x_3. Ma, tranne indicazione in contrario, si supporrà che $E, \nu, f_1(t, \tau), f_2(t, \tau), \sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ sono in generale, funzioni di x_1, x_2, x_3.

Ritorniamo ora al problema iniziale. Abbiamo dunque il corpo esente di stati di coazioni iniziali, e dobbiamo ricercare la possibilità di congruenza delle deformazioni viscose, ogni volta che siano congruenti le deformazioni elastiche. Analiticamente questo fatto comporta che si devono verificare simultaneamente le equazioni (2) e (5).

Sostituendo (9) in (5) si deve verificare

$$\int_0^t d\tau \int_V \bar{\bar{\sigma}}_{ij}(\tau) \cdot f_1(t, \tau)\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0 \tag{12}$$

per il che occorre e basta che

$$\int_V \bar{\bar{\sigma}}_{ij}(t) \cdot f_1(t, \tau)\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0\,. \tag{13}$$

Mediante una semplice transformazione algebrica, si può esprimere l'equazione (7) nella forma

$$\bar{\bar{\sigma}}_{ij}(t) = (1 - \mathcal{H})\, \sigma_{ij}(t) + \mathcal{H} E \varepsilon^e_{ij}(t)$$

che sostituita nella (13) e tenendo conto che $\mathcal{H} = \dfrac{f_2(t, \tau)}{f_1(t, \tau)}$

$$\int_V [(f_1 - f_2)\, \sigma_{ij} + E f_2\, \varepsilon^e_{ij}]\, \delta\sigma_{ij}\, dV = 0\,. \tag{14}$$

Chiamando con

$$\alpha_{ij} = E f_2 + (f_1 - f_2) \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon^e_{ij}} \tag{15}$$

la precedente diventa

$$\int_V [\varepsilon^e_{11}(t)\, \alpha_{11}\, \delta\sigma_{11} + \varepsilon^e_{22}(t)\, \alpha_{22}(t)\, \delta\sigma_{22} + \cdots]\, dV = 0 \tag{16}$$

che dovrà essere soddisfatta simultaneamente con l'equazione (2), per tutti gli stati di coazione $\delta\sigma_{ij}$ del corpo.

Allora sarà ovviamente necessario che per qualsiasi stato di coazione $\delta\sigma_{ij}$ le funzioni

$$\alpha_{11}\, \delta\sigma_{11}\,, \alpha_{22}\, \delta\sigma_{22}\,, \cdots, \alpha_{23}\, \delta\sigma_{23}$$

siano componenti di uno stato di coazione. Ma se vogliamo – come abbiamo impostato all'inizio di questa Nota – ottenere delle conclusioni qualsiasi sia il sistema di forze e conseguentemente di tensioni e deformazioni che agisce sul corpo, α_{ij} dovrà essere indipendente dallo stato di tensioni e deformazioni, ciò che implica d'accordo con (15) che

$$f_1 = f_2 . \tag{17}$$

Allora α_{ij} diventa la funzione

$$\alpha = \mathrm{E} f .$$

Ora non è difficile provare che perché $\alpha\delta\sigma_{ij}$ sia uno stato di coazione qualsiasi sia lo stato de coazione $\delta\sigma_{ij}$, α dev'essere una costante rispetto di x_i. Infatti, gli stati di coazione $\delta\sigma_{ij}$ sono le soluzioni del sistema di equazioni differenziali omogenee

$$\delta\sigma_{ij,i} = 0 \quad \text{(l'indice dopo la virgola indica derivazione)} \tag{18}$$

che soddisfano le seguenti condizioni di bordo

$$\delta\sigma_{ij} \cdot \eta_j = 0 \tag{19}$$

dove η_j rappresentano i coseni direttori della normale alla superficie.

Ora, se $\alpha\delta\sigma_{ij}$ dev'essere uno stato di coazione, si dovrà verificare

$$[\alpha \cdot \delta\sigma_{ij}]_{,i} = 0 \tag{20}$$

$$\alpha\delta\sigma_{ij} \cdot \eta_j = 0 . \tag{21}$$

L'equazione (20) rimane identicamente verificata qualsiasi sia la funzione α. Procedendo alla derivazione indicata della (19) si ha

$$[\alpha \cdot \delta\sigma_{ij}]_{,i} = \alpha_{,i}\, \delta\sigma_{ij} + \alpha\delta\sigma_{ij,i} = 0 .$$

Tenendo conto della (18) la precedente diventa

$$\alpha_{,i} \cdot \delta\sigma_{ij} = 0$$

che è un sistema di equazioni lineari omogeneo che ammette la soluzione triviale

$$\alpha = \text{costante indipendente di } x_i \tag{22}$$

oppure infinite soluzioni se e solo se

$$\det . \, | \, \delta\sigma_{ij} \, | = 0 . \tag{23}$$

Ovviamente quest'equazione non può essere soddisfatta per tutte le soluzioni di (18) che soddisfano (19). Allora è necessario che si verifichi identicamente la (22) come volevamo dimostrare.

Allora (17) e (22) vengono ad essere – insieme alla condizione di assenza di stati di coazioni iniziale – condizioni necessarie perché le deformazioni elastiche siano congruenti qualsiasi sistema di forze esterne agisca sul corpo. Ed è facile dimostrare che sono pure condizioni sufficienti. Infatti, se il corpo è esente da stati di coazioni, la congruenza delle deformazioni totali si esprime con

$$\int_{\mathrm{V}} [\varepsilon^{e}_{ij}(t) + \varepsilon^{v}_{ij}(t)] \, \delta\sigma_{ij} \, d\mathrm{V} = 0 . \tag{24}$$

Ma, se si verificano le condizioni (17) e (22) la precedente diventa, tenendo conto delle (8) e (9)

$$\int_V \varepsilon_{ij}^e(t)\,\delta\sigma_{ij}\,dV + \int_0^t Ef(t,\tau)\,d\tau \int_V \varepsilon_{ij}^e(\tau)\,\delta\sigma_{ij}\,dV = 0$$

che è una equazione integrale omogenea di seconda specie di Volterra, che viene soddisfatta se, e solo se [5]

$$\int_V \varepsilon_{ij}^e(t)\,\delta\sigma_{ij}\,dV = 0$$

ciò che esprime la congruenza delle deformazioni elastiche.

Le demostrazioni precedenti ci permettono allora di enunciare il seguente

TEOREMA. *In un corpo viscoelastico isotropo soggetto a qualsiasi sistema di forze esterne o di massa, le deformazioni elastiche saranno congruenti ad ogni istante se, e solamente se, il corpo è essento di stati iniziali di coazione e si verificano le condizioni* (17) *e* (22).

La generalità del teorema impone sottolineare « *soggetto a qualsiasi sistema di forze esterne o di massa* » dell'enunciato precedente. Infatti, la necessarietà viene condizionata a che non uno particolare, ma qualsiasi sistema di forze possa essere considerato.

Vogliamo fare adesso due osservazioni con relazione al teorema precedente, non esente da interesse pratico.

Dall'analisi delle condizioni (17) e (22) sorge d'immediato l'impossibilità che in corpo viscoelastico non–omogeneo che abbia almeno una parte solamente elastica, le deformazioni elastiche siano congruenti. Infatti, nella parte elastica si avrà identicamente $f(t, \tau) = 0$ e ciò implica – secondo (22) – $Ef = 0$ dappertutto, che può riuscire possibile se, e solo se, il corpo è totalmente elastico.

Da un altro punto di vista invece, è interessante analizzare cosa comporta la congruenza delle deformazioni elastiche nei cosidetti problemi lineari quasi statici, cioè nei quali lo stato di tensioni non dipende dalle deformazioni del corpo, e le forze esterne si suppongono applicate lentamente in maniera di trascurare effetti dinamici. In questo caso non è difficile dimostrare *che lo stato di tensioni del corpo viscoelastico è coincidente con lo stato di tensioni del corpo considerato elastico, senza tenere conto delle deformazioni viscose.* Infatti, nei problemi lineari quasi statici l'energia di deformazioni del corpo non dipende né esplicitamente né implicitamente dalla posizione deformata del corpo e perciò dalle deformazioni viscose. Ora è noto che l'equazione (2) esprime la condizione di minimo della energia di deformazioni del corpo. Ciò significa che le tensioni del corpo viscoelastico saranno ciò che caratterizzano lo stato di tensioni del corpo considerato puramente elastico, come volevamo dimostrare.

Da ciò che precede non è difficile inferire il seguente

COROLLARIO: Nei problemi lineari, lo stato di tensioni di un corpo viscoelastico isotropo, non necessariamente omogeneo, soggetto a qualsiasi sistema di forze esterne o di massa, rimarrà costante nel tempo se e solo se il corpo è essento di stati di coazioni e si verificano le condizioni (17) e (22).

Se si considera un particolare sistema di forze agenti sul corpo, allora l'assenza di stati di coazione e (17) e (22) sono condizioni sufficienti ma non necessarie per assicurare la costanza delle tensioni nel tempo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. N. DISTÉFANO, *Sul comportamento asintotico di corpi viscoelastici a ereditarietà invariabile*, «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», vol. 95 (1960–61).

[2] J. N. DISTÉFANO, *Sul comportamento asintotico dei corpi viscoelastici nella teoria delle coazioni*, «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», vol. 95 (1960–61).

[3] G. COLONNETTI, *Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscose*, «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», serie VIII, vol. IV, fasc. 5 (1948).

[4] V. VOLTERRA, «Acta Mathematica», 35.

[5] S. BANACH, *Théorie des Opérations Linéaires*, pp. 162–163, Chelsea Publishing Company, New York 1955.