Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Antonio Rosati

Su una nuova classe di piani grafici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 282–284.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_282_0>

Geometria. — *Su una nuova classe di piani grafici* (*). Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

Mentre sono noti esempi di sistemi cartesiani propri infiniti, i sistemi cartesiani finiti conosciuti sono sempre dei quasicorpi. In altre parole nei piani grafici fino ad oggi studiati nei quali si abbiano tutte le possibili omologie speciali di centro P ed asse r ($\mathrm{P} \in r$) si verifica sempre uno dei seguenti fatti:

a) esistono tutte le possibili omologie speciali di asse r (piani di traslazione);

b) esistono tutte le possibili omologie speciali di centro P (duali dei piani di traslazione).

In questa Nota, che ne riassume un'altra in corso di pubblicazione, si definisce una classe di piani grafici finiti (1), si fa vedere che non sono di traslazione, né duali di piani di traslazione e si mostra che contengono un punto P e una retta r, appartenentisi, tali che esistono tutte le omologie speciali di centro P ed asse r, provando così per la prima volta l'esistenza di sistemi cartesiani finiti che non sono dei quasicorpi.

Si mostra anche che questi piani sono dotati di una sola coppia punto–retta incidenti (P, r) tale che esistano tutte le omologie speciali di centro P ed asse r. Pertanto essi costituiscono i primi esempi di piani proiettivi finiti appartenenti alla classe II della classificazione di Lenz.

1. Sia S un quasicorpo non distributivo sinistro (2) d'ordine q^2 contenente come sotto–quasicorpo un campo F d'ordine q e dotato delle seguenti proprietà

$$ai + bi = (a + b)\,i \qquad (i \in \mathrm{F}) \tag{1}$$

$$(ab)\,i = a\,(bi) \qquad (i \in \mathrm{F}). \tag{2}$$

A partire da S, T. G. Ostrom [2] ha introdotto un nuovo piano non desarguesiano Λ nella seguente maniera.

I punti di Λ sono le coppie ordinate di elementi di S. Le rette di Λ sono gli insiemi dei punti (x, y) che soddisfano una delle seguenti condizioni

a) $y = xm + n$ (m, n fissi, $m \in \mathrm{S} - \mathrm{F}$)

b) $x = ai + c$, $y = aj + d$ ($a \neq 0$, c, d elementi fissi di S, i, j variabili in F).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 8 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) La definizione di questi piani e le loro principali proprietà sono state esposte la prima volta in una riunione del gruppo di ricerca n. 8 del Comitato per la Matematica del C.N.R., tenuta a Firenze nel dicembre del 1962.

Gli stessi piani sono stati definiti, in modo completamente indipendente anche da T. G. Ostrom e D. R. Hughes.

(2) Supponiamo cioè che in S valga la proprietà distributiva $a\,(b + c) = ab + ac$.

Un piano di Ostrom, che indicheremo con Π_2, si può ottenere in particolare partendo da un quasicorpo associativo sinistro R d'ordine q^2 avente per centro un campo d'ordine q. Indicheremo con Π_1 il piano affine di Hughes relativo ad R.

Rammentiamo che i punti di Π_1 sono, come i punti di Π_2, le coppie ordinate di elementi di R ed è facile riconoscere che le rette di Π_1 si possono dividere in due classi:

c) rette d'equazione $y - p = (x - q)\, t \; (p, q \in F \;,\; t \in R - F)$;

d) rette d'equazione $ax + by + s = 0 \; (a, b \in F \;;\; s \in R)$.

Si vede immediatamente che l'insieme dei punti (x, y) forniti dalle equazioni *b*) al variare di i, j in F è un sottopiano di Π_1 e che le rette ad esso appartenenti sono di tipo *d*).

Consideriamo ora un nuovo insieme, Π, di « punti » e di « rette ». Precisamente diremo punti di Π i punti di Π_1 (e di Π_2), rette di Π le rette di Π_1 di tipo *c*) e le rette di Π_2 di tipo *b*).

Si dimostra facilmente il

TEOREMA 1. – *Π è un piano affine.*

La dimostrazione si basa sui seguenti due lemmi.

LEMMA 1. – *Al variare di p, q in F la retta r di Π_1 di tipo c) $y - p = (x - q)\, t$ descrive tutte e sole le rette di un fascio di rette parallele. Pertanto le rette di Π_1 di tipo c) si suddividono in $q^2 - q$ fasci di rette parallele.*

LEMMA 2. – *Le rette di Π_2 di tipo b) si suddividono in $q + 1$ fasci di rette parallele.*

2. D'ora in avanti indicheremo con $\{ai + c, aj + d\}$ la retta di Π $x = ai + c, y = aj + d$. Indicheremo poi con $\overline{\Pi}$ il piano proiettivo corrispondente al piano affine Π, con r_∞ la retta impropria di $\overline{\Pi}$ e, rispettivamente, con l ed I la retta $\{i, j\}$ ed il suo punto improprio.

È di immediata verifica il

TEOREMA 2. – *Π ammette le collineazioni di equazioni*

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}\,\sigma x + a_{12}\,\sigma y + b_1 \\ y' &= a_{21}\,\sigma x + a_{22}\,\sigma y + b_2 \end{aligned} \qquad |a_{ij}| \neq 0 \quad ; \quad a_{ij}, b_1, b_2 \in F,$$

essendo σ un automorfismo di R.

Pertanto Π ammette un gruppo, G, *di collineazioni isomorfo al gruppo delle affinità di Π_1* [3].

Rammentiamo che, se P ed r sono un punto e una retta di un piano proiettivo, questo si dice (P, r)–transitivo se ammette tutte le omologie di centro P ed asse r.

TEOREMA 3. – *Le uniche traslazioni di Π hanno le equazioni $x' = x + a$, $y' = y + b$ $(a, b \in F)$. Pertanto $\overline{\Pi}$ è (P, r_∞)-transitivo se e solo se* P *coincide con* I. *Una collineazione di $\overline{\Pi}$ che lascia ferma r_∞ lascia fermo anche* I.

Da questo teorema discende subito il seguente

COROLLARIO. – *$\overline{\Pi}$ non è desarguesiano né un piano di Hughes.*

Infatti, presi comunque su uno di tali piani un punto ed una retta incidenti, esiste sempre una collineazione che sposta il punto e lascia ferma la retta (ved. [5] per quanto riguarda i piani di Hughes).

TEOREMA 4. – *Il gruppo* Σ *delle omologie di* Π (*di* Λ) *aventi per asse* l *e che mutano in sé ciascuno dei due sistemi di rette* b) *e* c) (a) *e* b)) *è isomorfo al gruppo degli automorfismi di* R (*di* S) *che lasciano fermo ogni elemento di* F.

Il gruppo degli automorfismi di un quasicorpo finito associativo non eccezionale è stato determinato da H. Zassenhaus [6]. Fra i sette quasicorpi associativi eccezionali ve ne sono tre d'ordine q^2 rispettivamente uguale a 11^2, 23^2, 59^2 che hanno per centro un campo di ordine q. A proposito di questi stabiliamo il seguente teorema che ci sarà utile nel seguito.

TEOREMA 5. – *Sia* R *un quasicorpo associativo finito d'ordine* q^2 *avente per centro un campo* F *d'ordine* q. *Se* R *ammette un automorfismo d'ordine* q *che lascia fermi tutti gli elementi di* F, *allora* $q = 3$. *Se* R *è eccezionale l'ordine del gruppo degli automorfismi di* R *è uguale a due, se* $q = 11$, *uguale a uno, se* $q = 23, 59$.

Per il teorema 3, $\overline{\Pi}$ è (I, r_∞)–transitivo. Ne viene che con una conveniente scelta degli elementi di riferimento, il corpo ternario delle coordinate dei punti di $\overline{\Pi}$ è un sistema cartesiano. Ebbene, il seguente teorema mostra che questo sistema cartesiano, per $q \neq 3$, non è un quasicorpo.

TEOREMA 6. – $\overline{\Pi}$ *non è di traslazione e se* $q \neq 3$ *non è il duale di un piano di traslazione. Se* $q = 3$, $\overline{\Pi}$ *è il duale di un piano di traslazione.*

Tenuto conto di questo teorema e del teorema 3 si ha che $\overline{\Pi}$ appartiene o alla classe II o alla classe III della classificazione di Lenz [1]. Il teorema 7 mostra l'appartenenza in generale alla classe II del piano $\overline{\Pi}$ che è perciò il primo esempio di un piano proiettivo finito appartenente a tale classe.

TEOREMA 7. – *Se è* $q \neq 3$ *ed* R *non è il quasicorpo eccezionale d'ordine* 23^2 *o* 59^2, *e con* P *ed* r *indichiamo un qualunque punto ed una qualunque retta incidenti, allora* $\overline{\Pi}$ *è* (P, r)*–transitivo se, e solo se,* $\mathrm{P} = \mathrm{I}$, $r = r_\infty$.

Vale inoltre il

TEOREMA 8. – *Se è* $q \neq 3$, $\overline{\Pi}$ *non è un piano proiettivo di Ostrom.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. LENZ, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, « Jahrbericht der Deutschen Math. », *57*, 20–31 (1954).

[2] T. G. OSTROM, *A class of non-desarguesian affine planes*, « Trans. of the Amer. Math. Soc. », *104*, 483–487 (1962).

[3] L. A. ROSATI, *I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, « Boll. U. M. I. », (3), *13*, 377–388 (1958).

[4] L. A. ROSATI, *Unicità e autodualità dei piani di Hughes*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *30*, 316–327 (1960).

[5] G. ZAPPA, *Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, « Boll. U. M. I. », (3), *12*, 507–516 (1957).

[6] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper*, « Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. », *11*, 187–220 (1935).