
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

STEFANO REIMAN

Su una proprietà dei piani grafici finiti

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.5, p. 279–281.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_279_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Su una proprietà dei piani grafici finiti.* Nota di STEFANO REIMAN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Consideriamo due insiemi: un insieme P di *punti* e un insieme R di *rette*. Sia $\mathfrak{I}(p, r)$ una funzione sopra P ed R ($p \in P, r \in R$), i cui valori possano soltanto essere 0 od 1. Se $\mathfrak{I}(p, r) = 1$, allora diciamo che p ed r sono fra loro *incidenti*; se $\mathfrak{I}(p, r) = 0$, allora diciamo che p ed r sono fra loro *non-incidenti*. Sia N il numero delle coppie (p, r) per le quali $\mathfrak{I}(p, r) = 1$. Il valore N verrà chiamato il numero delle incidenze. Gli insiemi P, R e la funzione $\mathfrak{I}(p, r)$ siano determinati in modo che valgano i seguenti tre postulati:

- i) *i punti siano in numero di $n = p^{2\alpha} + p^\alpha + 1$ ed altrettante le rette (con p primo);*
- ii) *due rette abbiano al più un punto in comune (incidente alle rette);*
- iii) *il numero N delle incidenze sia il massimo possibile, al variare del sistema $\{\mathfrak{I}; P, R\}$ soddisfacente alle condizioni i) e ii).*

In questa Nota mostreremo che *gli insiemi P ed R che soddisfanno ai postulati i)–iii), costituiscono un piano grafico finito.*

1. Incominciamo col provare la seguente:

PROPOSIZIONE I. — *Da i)–iii) segue che*

$$(1) \quad \max N = (p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)(p^\alpha + 1).$$

Per dimostrare ciò introduciamo *la matrice d'incidenza* del sistema $\{\mathfrak{I}; P, R\}$, cioè ⁽¹⁾ una matrice di tipo $n \times n$, nella quale le righe e le colonne corrispondono agli elementi di R ed agli elementi di P , gli elementi della matrice essendo:

$$a_{kl} = \mathfrak{I}(p_l, r_k) \quad (\text{dove } p_l \in P \text{ ed } r_k \in R).$$

Denotiamo con $r_1, r_2, \dots, r_n$ e $p_1, p_2, \dots, p_n$ i vettori che sono determinati dalle righe e dalle colonne della matrice. Sia ρ_j il numero delle cifre 1 nella riga j -esima, e π_j il numero delle cifre 1 nella colonna j -esima.

Evidentemente

$$(2) \quad N = \sum_{j=1}^n \pi_j = \sum_{j=1}^n \rho_j.$$

Ora, facendo il quadrato della somma dei vettori r , si ha

$$(3) \quad \left(\sum_{j=1}^n r_j \right)^2 = \sum_{j=1}^n r_j^2 + \sum_{j \neq k} r_j r_k.$$

(*) Nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) Cfr. ad esempio B. SEGRE, *Gli spazi grafici*, « Rend. Semin. Mat. Fis. Milano », 30 (1960) 223–241, § 3.

Essendo $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ le componenti di Σr_j , si ha poi

$$(4) \quad \left(\sum_{j=1}^n r_j \right)^2 = \sum_{j=1}^n \pi_j^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \pi_j \right)^2 = \frac{N^2}{n};$$

inoltre, essendo $r_j^2 = \rho_j$, dalla (3) segue che

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n r_j^2 = N;$$

e poiché, in virtù di ii) se $j \neq k$ il valore del prodotto $r_j r_k$ è 0 od 1, così

$$(6) \quad \sum_{j \neq k} r_j r_k \leq 2 \binom{n}{2} = n(n-1).$$

In virtù delle (4), (5), (6), dalla (3) segue che

$$(7) \quad \frac{N^2}{n} \leq \sum_{j=1}^n \pi_j^2 \leq N + n(n-1),$$

da cui si ha:

$$N^2 - nN - n^2(n-1) \leq 0;$$

ne discende che

$$(8) \quad N \leq \frac{n}{2} (1 + \sqrt{4n-3}) = (p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)(p^\alpha + 1).$$

Dunque - in base alla (8) - il valore di N può essere al massimo $(p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)(p^\alpha + 1)$; ma esiste tal caso, nel quale il numero delle incidenze assume questo valore massimo, perché un piano lineare di ordine p^α soddisfa evidentemente ai postulati i) e ii), ed il numero delle incidenze di questo piano è precisamente $(p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)(p^\alpha + 1)$. Così abbiamo dimostrato la proposizione I.

In base a quanto precede, si può sostituire il postulato iii) con il seguente:

iii') *Il numero delle incidenze è $N = (p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)(p^\alpha + 1)$.*

2. Ora dimostreremo la seguente:

PROPOSIZIONE II. - *Il sistema $\{\mathcal{J}; P, R\}$ soddisfacente ai postulati i), ii), iii') è un piano grafico finito.*

Incominciamo con l'osservare che nella formula (4) l'uguaglianza sussiste se, e soltanto se,

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_n.$$

Ciò significa che il numero dei punti incidenti ad una retta è lo stesso per qualunque retta.

Inoltre, nella formula (6) l'uguaglianza sussiste se, e soltanto se, i valori di tutti i prodotti $r_j r_k$ (dove $j \neq k$) sono eguali ad 1, cioè due qualunque rette hanno sempre un punto a comune (punto incidente ad ambedue). Se vale la iii), allora nella formula (7) sussistono le uguaglianze e conseguentemente anche nelle formule (4) e (5); dunque:

Il numero dei punti incidenti ad una retta è lo stesso per ogni retta, e due rette distinte hanno uno ed un sol punto a comune.

Da quest'ultima proposizione segue che vale la duale di ii):

ii') *Esiste al più una retta incidente a due punti distinti.*

Dal punto di vista logico, le strutture del sistema [i, ii', iii] e del sistema [i, ii, iii] sono equivalenti. Conseguentemente, considerando quest'ultimo sistema, è facile dedurre – in modo del tutto simile a come abbiamo fatto precedentemente – che:

Il numero delle rette incidenti ad un punto è lo stesso per ogni punto e due punti distinti determinano una ed una sola retta congiungente.

Ci rimane infine da provare che:

Esiste una quaterna di punti a tre a tre non allineati. Per dimostrare questa proposizione, consideriamo due rette distinte; allora (oltre al punto comune) ciascuna di queste contiene altri p^a punti. Essendo $p^a \geq 2$, si può scegliere una coppia di punti su una retta e un'altra sull'altra retta (punti distinti dal punto comune) per ottenere la quaterna in questione. Così si è dimostrato completamente la proposizione II e quindi pure quanto asserito alla fine dell'introduzione.

OSSERVAZIONE. – In base alla seconda parte della dimostrazione precedente, si può dare la seguente più generale definizione di piano grafico finito:

i*) il numero dei punti ed anche il numero delle rette sia $n = q^2 + q + 1$ (dove q è un numero intero ≥ 2);

ii*) due rette distinte si intersecano in al più un punto;

iii*) il numero delle incidenze sia $(q^2 + q + 1)(q + 1)$.

Dunque [i*, ii*, iii*] è un sistema di proposizioni che caratterizza i piani in questione.