Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Di Comite

Su k-archi contenuti in cubiche piane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 274–278.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_274_0>

Geometria. — *Su k–archi contenuti in cubiche piane.* Nota di Claudio Di Comite, presentata (*) dal Socio B. Segre.

In un piano lineare $S_{2,q}$ sopra un corpo finito σ di ordine $q = p^h$ (p–primo), il prof. B. Segre (ved. B. Segre [9], [10], [11], [12]) si è ripetutamente servito di curve algebriche per costruire k–archi [le coniche sono $(q+1)$–archi (B. Segre [9]), completi se q è dispari (B. Segre [11]), incompleti se q è pari (B. Segre [10]); in quest'ultimo caso (B. Segre [10]), da esse si ottengono infatti $(q+2)$–archi (completi) mediante l'aggiunta di un punto opportuno (nucleo della conica); curve algebriche di ordine maggiore di due intervengono nella costruzione (B. Segre [10]) di $(q+2)$–archi ($q = 2^h$, $h = 5$ o $h \geq 7$) non contenenti una conica]; così pure il prof. L. Lombardo Radice (ved. L. Lombardo Radice [4]) si è servito di coniche per costruire $(q+5)/2$–archi completi (q dispari e $q \equiv 3 \pmod 4$) ed io, consigliato dal prof. B. Segre, (ved. C. Di Comite [3]) mediante C^3 cuspidate ho costruito 8–archi completi di $S_{2,11}$ e 10–archi completi di $S_{2,17}$.

In questa Nota, prendendo l'avvio da colloqui concessimi dal prof. B. Segre, determino in $S_{2,q}$ k–archi contenuti in C^3 nodate e, in particolare, dimostro che ogni C^3 nodata contiene un $(q+1)/2$–arco, da cui, per $q = 13$, si può ottenere un 12–arco completo di $S_{2,13}$ (12–archi completi di $S_{2,13}$ sono stati costruiti dal prof. M. Sce con l'aiuto di una calcolatrice elettronica (ved. M. Sce–L. Lunelli [5]).

1. Alcuni richiami sulle C^3 nodate di $S_{2,q}$ (1). – Nel piano proiettivo $S_{2,q}$ sopra il campo finito σ di caratteristica $p \neq 2,3$ (2) ed ordine $q = p^h$, sia K una cubica avente un punto doppio N a tangenti principali distinte, t_1 e t_2, su σ.

Ogni retta di $S_{2,q}$ passante per N e distinta da t_1 e t_2 interseca K, oltre che in N, in uno ed un solo punto, necessariamente su σ. Ne segue che:

I) K *contiene* q *punti di* $S_{2,q}$.

Poiché l'ordine di K è minore di p ($p \neq 2,3$), è lecito servirsi nello studio di K delle formule di Plücker, purché si tenga conto anche degli elementi (punti e rette) che non sono sul campo base. Risulta così che:

II) K *è di classe* 4 *e possiede* 3 *flessi.*

Fissato su K un punto P di $S_{2,q}$, $P \neq N$, e detta t la relativa tangente, si scelga in $S_{2,q}$ un riferimento R al modo seguente:

$$O_1 = t \cap t_1 \quad , \quad O_2 = t \cap t_2 \quad , \quad O_3 = N \quad , \quad U \in NP.$$

(*) Nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) Alcune proposizioni di questo numero si possono dimostrare per altra via, più sintetica, ma si è preferito ricorrere a considerazioni di carattere algebrico perché queste risulteranno utili in seguito.

(2) Nel seguito, anche se non detto esplicitamente, si supporrà sempre $p \neq 2,3$.

In R , K è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$x = \lambda^2 \ , \ y = \lambda \ , \ z = (\lambda - 1)^2 (a\lambda + b) \ , \qquad \text{con} \quad a \, , b \neq 0. \tag{1.1}$$

Per $\lambda = 0$ si ha il nodo e quindi al variare di λ in $\sigma - 0$ si hanno i $q - 1$ punti di $S_{2,q}$ appartenenti a K e distinti dal nodo.

Se una retta, di equazione $ux + vy + wz = 0$, interseca K nei tre punti di parametro rispettivamente $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$, con $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \neq 0$, l'equazione

$$u \lambda^2 + v\lambda + w (\lambda - 1)^2 (a\lambda + b) = 0$$

ha come radici $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$, risulta quindi

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = - b/a = g . \tag{1.2}$$

Con procedimento inverso si vede che, se è verificata la (1.2), resta determinata una retta che interseca K nei tre punti.

Dalla (1.2) segue che un punto di K, di parametro λ, è un flesso se e solo se $\lambda^3 = g$; quindi (ved. B. Segre [12], Ch. 12, n. 79):

III) *Se* $q \not\equiv 1$ (mod 3), *uno ed uno soltanto dei tre flessi di* K *è su* σ; *mentre, se* $q \equiv 1$ (mod 3), *o tutti e tre i flessi di* K *sono su* σ *oppure nessuno di essi lo è.*

Dalla (1.2) segue inoltre che, per ogni $\lambda \in \sigma - 0$, il punto di parametro λ ha per tangenziale il punto di parametro $g\lambda^{-2}$ e, a sua volta, è il tangenziale dei due punti che si ottengono in corrispondenza delle radici quadrate di $\lambda^{-1} g$; quindi, entrambi questi punti sono in $S_{2,q}$ se $\lambda^{-1} g$ è un quadrato o, ciò che è lo stesso, se λg è un quadrato, mentre nessuno dei due è in $S_{2,q}$ se λg è un non-quadrato; in particolare λg è un quadrato quando il punto di parametro λ è un flesso ($\lambda^3 = g$) ed, in tal caso, esso è il tangenziale del punto di parametro $- \lambda$, oltre che di se stesso.

Si conclude che:

IV) *Delle tre tangenti passanti per un punto di* $S_{2,q}$ *appartenente a* K *e distinto dal nodo e dai flessi, o soltanto la tangente nel punto medesimo è su* σ *oppure tutte e tre sono su* σ; *l'ulteriore tangente passante per un flesso su* σ *è su* σ; *detto* i *il numero dei flessi su* σ, *il numero dei punti del primo tipo è* $(q - 1)/2$ *e quello dei punti del secondo tipo* $(q - 1)/2 - i$.

2. *k*-ARCHI CONTENUTI IN C^3 NODATE DI $S_{2,q}$. – Sia K_0 l'insieme dei $(q - 1)/2$ punti di $S_{2,q}$ appartenenti a K, per ciascuno dei quali passa una sola tangente su σ, vale a dire la tangente nel punto considerato, e, per ogni $i = 1 , 2 , \cdots,$ sia K_i l'insieme dei tangenziali dei punti di K_{i-1}; detto r il massimo intero positivo tale che 2^r divida $q - 1$, si proverà che:

V) *a*) $(K_i)_{i=0,1,\ldots,r}$ *costituisce una partizione dell'insieme dei punti di* $S_{2,q}$ *appartenenti a* K, *distinti dal nodo, essendo inoltre* $K_{r+1} = K_r$;

b) *per ogni* $i = 0 , 1 , \cdots , r - 1$, K_i *è un* $(q - 1)/2^{i+1}$*-arco, mentre, se* $(q - 1)/2^r > 3$ (3), K_r *è un* $\{(q - 1)/2^r , 3\}$*-arco.*

(3) Risulterà anche dal seguito che, se $(q - 1)/2^r = 3$ (quindi $q \equiv 1$ (mod 3)), i tre punti di K_r sono proprio i tre flessi di K, se questi sono su σ, e sono quindi allineati, mentre essi non sono allineati se K non ha flessi su σ.

Riferendosi alla rappresentazione parametrica (1.1), per ogni $i = 0, 1, \cdots$, i punti dell'insieme K_i si ottengono in corrispondenza dei valori di λ appartenenti all'insieme H_i così definito:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} (\lambda \in H_0) \Longleftrightarrow (\lambda g \text{ non-quadrato}), \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots : \\ (\lambda \in H_i) \Longleftrightarrow (\exists\, \mu \in H_{i-1} \ni' \lambda = g\mu^{-2}) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (\exists\, \nu \in H_0 \ni' \lambda = g^{(1-(-2)^i)/3}\, \nu^{(-2)^i}). \end{cases}$$

I $(q-1)/2$ elementi di H_0 sono o tutti i quadrati di $\sigma - 0$ o tutti i non-quadrati, a seconda che g sia non-quadrato o quadrato.

Si proverà che, se $r > 1$, $\forall\, i = 0, 1, \cdots, r-2$: $(\lambda \in H_i) \Rightarrow (-\lambda \in H_i)$. Infatti, per le (2.1), $\exists\, \nu \in H_0 \ni' \lambda = g^{(1-(-2)^i)/3}\, \nu^{(-2)^i}$ e, per B. Segre [12], n. 79, pag. 102, I prop., $\exists\, \varepsilon \in \sigma - 0 \ni' \varepsilon^{2^{i+1}} = -1$, d'altra parte $\varepsilon^2 \nu \in H_0$, ne segue $g^{(1-(-2)^i)/3}(\varepsilon^2 \nu)^{(-2)^i} = -\lambda \in H_i$.

Quindi (ved. (2.1)), per ogni $i = 1, \cdots, r-1$, il numero di elementi di H_i è la metà di quello di H_{i-1} e, poiché H_0 contiene $(q-1)/2$ elementi, per ogni $i = 0, 1, \cdots, r-1$, H_i contiene $(q-1)/2^{i+1}$ elementi [(4)].

Si dimostrerà ora che, al contrario, qualunque sia il valore di r: $(\lambda \in H_{r-1}) \Rightarrow (-\lambda \notin H_{r-1})$. Infatti, se per assurdo $\exists\, \lambda \in H_{r-1} \ni' -\lambda \in H_{r-1}$, per le (2.1) $\exists\, \nu, \nu' \in H_0 \ni' \lambda = g^{(1-(-2)^{r-1})/3}\, \nu^{(-2)^{r-1}}$, $-\lambda = g^{(1-(-2)^{r-1})/3}\, \nu'^{(-2)^{r-1}}$, da cui $(\nu' \nu^{-1})^{(-2)^{r-1}} = -1$, e poiché $\nu' \nu^{-1}$ è un quadrato, ciò è assurdo per B. Segre [12], n. 79, p. 102, I prop.

Quindi (ved. (2.1)) H_r contiene lo stesso numero di elementi di H_{r-1}, cioè $(q-1)/2^r$.

È ovvio che, per ogni $i = 0, 1, \cdots, r-1$, $(q-1)/2^{i+1}$ è anche il numero di punti di K_i e $(q-1)/2^r$ quello di K_r.

Si osservi che $K_0 \cap K_i = \emptyset$, per ogni $i = 1, 2, \cdots, r$, poiché diversamente qualche punto di K_0 sarebbe tangenziale di qualche punto di K appartenente ad $S_{2,q}$. Così pure, per ogni $0 \leq i_1 < i_2 \leq r$, $K_{i_1} \cap K_{i_2} = \emptyset$, perché diversamente si arriverebbe all'assurdo $K_0 \cap K_{i_2 - i_1} = \emptyset$.

Gli insiemi K_i, $i = 0, 1, \cdots, r$, sono dunque a due a due disgiunti e, poiché il numero di punti contenuti complessivamente in essi è $\sum_{i=0}^{r-1} (q-1)/2^{i+1} + (q-1)/2^r = q-1$, $(K_i)_{i=0,1,\dots,r}$ è una partizione dell'insieme dei punti di $S_{2,q}$ appartenenti a K, diversi dal nodo.

Si osservi anche che gli eventuali flessi su σ appartengono a K_r, perché diversamente si avrebbero due K_i non disgiunti, ed inoltre $K_{r+1} = K_r$, poiché il tangenziale di un punto di K_r non può appartenere che a K_r e due punti distinti di K_r non possono avere lo stesso tangenziale.

Resta così provata la a) e parte della b). Per dimostrare che, per ogni $i = 0, 1, \cdots, r-1$, K_i è un $(q-1)/2^{i+1}$–arco basterà far vedere ancora (si ricordi la (1.2)) che, per ogni $i = 0, 1, \cdots, r-1$, non può essere

$$(2.2) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in H_i \wedge \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = g.$$

(4) La conclusione a cui si è giunti è banalmente vera per $r = 1$.

Infatti, se per un $i < r$ esistessero tre valori di λ siffatti, dalle (2.1), (2.2) seguirebbe l'esistenza di tre elementi ν_1, ν_2, $\nu_3 \in H_0$ tali che $(\nu_1 \nu_2 \nu_3 g^{-1})^{(-2)^i} = 1$; ma ciò è assurdo, poiché le radici della equazione $x^{2^i} = 0$, con $i < r$, sono tutte dei quadrati (precisamente sono le potenze di esponente 2^{r-i} delle radici della equazione $x^{2^r} = 1$), mentre $\nu_1 \nu_2 \nu_3 g^{-1}$ è un non–quadrato, essendo il prodotto del quadrato $\nu_1 \nu_2$ per il non–quadrato $\nu_3 g^{-1}$.

L'ultima parte della b) si deduce subito dalla seguente prop., più generale, che ora si proverà:

VI) *Ogni retta di* $S_{2,q}$ *congiungente un punto di* K_{i_1} *con un punto di* K_{i_2}, *con* $0 \leq i_1 < i_2 \leq r$, *interseca ulteriormente* K *in un punto di* K_{i_1}, *che può coincidere con il punto prefissato di* K_{i_1} *soltanto se* $i_2 = i_1 + 1$ (5).

Infatti, si considerino i punti di parametro rispettivamente $\lambda_1 \in H_{i_1}$ e $\lambda_2 \in H_{i_2}$, con $0 \leq i_1 < i_2 \leq r$, e sia λ il parametro in corrispondenza del quale si ottiene l'ulteriore punto di K appartenente alla retta congiungente i primi due. Per le (2.1), $\exists\, \nu_1, \nu_2 \in H_0 \ni' \lambda_1 = g^{(1-(-2)^{i_1})/3} \nu_1^{(-2)^{i_1}}$, $\lambda_2 = g^{(1-(-2)^{i_2})/3} \nu_2^{(-2)^{i_2}}$ e, per la (1.2), $\lambda = g^{(1-(-2)^{i_1})/3} \nu^{(-2)^{i_1}}$, ove $\nu = \nu_1^{-1} \nu_2^{-(-2)^{i_2-i_1}} \cdot g^{(2+(-2)^{i_2-i_1})/3}$ e νg è un non–quadrato, essendo il prodotto del non–quadrato $\nu_1^{-1} g$ per il quadrato $\nu_2^{-(-2)^{i_2-i_1}} g^{(2+(-2)^{i_2-i_1})/3}$, cioè $\nu \in H_0$ e quindi $\lambda \in H_{i_1}$.

È evidente che, se a K_i, per ogni $i = 0, 1, \cdots, r-1$, si aggrega il nodo di K, si ottiene un $((q-1)/2^{i+1} + 1)$–arco, $\overline{K}_i$; in particolare $\overline{K}_0$ è un $(q+1)/2$–arco e dalle V, VI segue che:

VII) *Relativamente a* K_0 *ed a* $\overline{K}_0$, *ogni punto di* K_1 *ha indice* (6) $(q-3)/4$, *se* $r = 1$, *e* $(q-5)/4$, *se* $r > 1$, *ed in quest'ultimo caso ogni punto di* K_i, *per ogni* $i = 2, 3, \cdots, r$, *ha indice* $(q-1)/4$.

È anche evidente che:

VIII) *Per* $q > 7$, $\overline{K}_0$ *non è contenuto in una conica e, più in generale, per* $q > 11$, 7 *punti qualsiasi di* $\overline{K}_0$ *non appartengono ad una conica.*

3. 6–ARCHI COMPLETI DI $S_{2,7}$ E 12–ARCHI COMPLETI DI $S_{2,13}$. – Se K possiede almeno un flesso F su σ (ved. prop. III), si può particolarizzare ulteriormente il riferimento R, prendendo P = F e scegliendo opportunamente il punto unità sulla retta NF, in modo tale che K sia suscettibile in esso della seguente rappresentazione parametrica:

$$x = \lambda^2 \quad , \quad y = \lambda \quad , \quad z = (\lambda - 1)^3.$$

Risulta così $g = 1$ e quindi H_0 è l'insieme dei non–quadrati di $\sigma - 0$ ed H_i, per ogni $i = 1, 2, \cdots$, l'insieme delle potenze di esponente $(-2)^i$ degli elementi di H_0.

(5) Una volta dimostrata la prima parte di questa prop., la seconda segue subito dalla definizione degli insiemi K_i.

(6) Ved. B. SEGRE [11] oppure B. SEGRE [12], ch. 17, n. 179.

Premesso ciò, si proverà che:

IX) *Se* K *è una* C^3 *nodata di* $S_{2,7}$ *avente i tre flessi sul campo base, aggregando al 4–arco* $\overline{K}_0$ *i due punti delle tangenti principali allineati coi flessi, si ottiene un 6–arco completo di* $S_{2,7}$ (7).

Infatti, siano Q_1 e Q_2 i due punti delle tangenti principali allineati coi flessi, le tre secanti di $\overline{K}_0$ non contenenti N intersecano la retta $Q_1 Q_2$, per la VII, nei tre flessi di K, non passano quindi né per Q_1 né per Q_2, inoltre le due rette NQ_1 ed NQ_2 (tangenti principali di K) sono due tangenti di $\overline{K}_0$, quindi Q_1 e Q_2 sono due punti di indice zero; la retta che li congiunge, contenendo i tre flessi di K, non può contenere nessun punto di $\overline{K}_0$ ed è quindi esterna a $\overline{K}_0$; si conclude che aggregando a $\overline{K}_0$ i punti Q_1 e Q_2 si ottiene un 6–arco di $S_{2,7}$. Si verifica poi analiticamente ch'esso non è contenuto in una conica e quindi, per il II teorema di B. Segre sui *k*–archi (ved. B. Segre [8]) non è contenuto nemmeno in un 7–arco; il 6–arco così ottenuto è cioè completo.

Si può anche provare analiticamente, valendosi delle VI, VII, VIII e facendo alcune considerazioni analoghe alle precedenti per abbreviare i calcoli, che:

X) *Se* K *è una* C^3 *nodata di* $S_{2,13}$ *avente i tre flessi sul campo base, aggregando al 7–arco* $\overline{K}_0$ *i due punti delle tangenti principali allineati coi flessi ed i tre punti diagonali del quadrangolo completo avente per vertici i punti di* $\overline{K}_1$, *si ottiene un 12–arco completo di* $S_{2,13}$.

(7) 6–archi completi di $S_{2,7}$ si possono anche ottenere in base al II teorema di B. SEGRE sui *k*-archi (ved. B. SEGRE [8]).

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva*, Zanichelli (1927).

[2] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei* { *k* , *n* }*–archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, « Rend. di Mat. », (3–4), *20*, 263–269 (1961).

[3] C. DI COMITE, « Rend. Acc. Naz. Lincei » [8], *33*, 429–435 (1962).

[4] L. LOMBARDO RADICE, *Sul problema dei k–archi completi* $S_{2,q}$ ($q = p^t$, *p primo dispari*), « Boll. U.M.I. », ser. III, 178–181 (1956).

[5] M. SCE–L. LUNELLI, *Sulla ricerca dei k–archi completi mediante calcolatrice elettronica.* Convegno reticoli e geometrie proiettive (Palermo 1957). Roma, Cremonese, 1958, pp. 81–86.

[6] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », [8] *17*, 141–142 (1954).

[7] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canad. J. Math. », 7, 414–416 (1955).

[8] B. SEGRE, *Curve razionali normali e k–archi negli spazi finiti*, « Ann. Mat. pura appl. », [4] *39*, 357–379 (1955).

[9] B. SEGRE, *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Rev.Fac. Sci. Univ. Istambul », ser. A, *21*, 97–123 (1956).

[10] B. SEGRE, *Sui k–archi nei piani finiti di caratteristica 2*, « Revue de Math. Pures et appl. », *2*, 289–300 (1957).

[11] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. », [4], 48, 1–97 (1959).

[12] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Ed. Cremonese (1961).