Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Ghelardoni

Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità locale della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali ordinari, normali, del primo ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 263–268.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_263_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Equazioni differenziali. — *Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità locale della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali ordinari, normali, del primo ordine* (*). Nota di GIUSEPPE GHELARDONI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

In questa Nota dimostrerò dapprima una condizione sufficiente perché un dato integrale dell'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{F}(x, y)$$

sia massimo o minimo deducendone quindi un teorema di unicità.

Darò poi teoremi analoghi per i sistemi di equazioni differenziali

$$y_i' = \mathrm{F}_i(x, y_1, \cdots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

tutto ciò nella classe delle funzioni assolutamente continue soddisfacenti quasi ovunque l'equazione o il sistema differenziale dato (1).

1. TEOREMA: *Sia* $\mathrm{F}(x, y)$ *definita in*

$$\mathrm{C}: 0 \leq x \leq a \quad (a > 0); \quad y \in \mathrm{E}_x$$

(E_x *insieme numerico chiuso, assegnato in corrispondenza ad ogni* x di $[0, a]$, $0 \in \mathrm{E}_0$)

Supponiamo che:

1° *Fissato comunque* $\sigma > 0$, *esista in corrispondenza un* $k > 0$ *tale che, per quasi tutti gli* x *di* $[0, k]$, *presi a piacere* $y_1, y_2 \in \mathrm{E}_x$ *con* $-k \leq y_1 < y_2 \leq k$, *risulti:*

$$\mathrm{F}(x, y_2) - \mathrm{F}(x, y_1) \leq \sigma; \tag{1}$$

2° $y = f(x)$, *definita in* $[0, a]$, *ivi assolutamente continua con* $f(0) = 0$, $f(x) \in \mathrm{E}_x$, *soddisfi quasi ovunque in* $[0, a]$ *l'equazione differenziale*

$$y' = \mathrm{F}(x, y); \tag{2}$$

3° *Qualunque sia la* $y(x)$, *assolutamente continua in* $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leq a)$, $y(0) = 0$, $y(x) \in \mathrm{E}_x$, $y(x) \geq f(x)$, *si verifichi quasi ovunque in* $[0, \delta]$ *la*

$$\mathrm{F}(x, y(x)) - \mathrm{F}(x, f(x)) \leq \min \left\{ \mathrm{L} \frac{y(x) - f(x)}{x}, \mathrm{M} \frac{[y(x) - f(x)]^\alpha}{x^\beta} \right\} \tag{3}$$

con $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, M *costante* > 0, $\mathrm{L} \leq 1 + \alpha - \beta$.

(*) Sezione Calcoli del C.S.C.E. del C.N.R. presso l'Università di Pisa.

(**) Nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) Fra i numerosi lavori sull'argomento ricorderò esplicitamente quelli di U. BARBUTI [2] e di L. MERLI [3].

Per una ampia bibliografia ed una esposizione sistematica dei criteri in uso si veda [1], pp. 85 e segg.

(I numeri entro parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Nota).

Allora se $g(x)$ (a.c., $g(0) = 0$, $g(x) \in E_x$) *verifica la* (2) *q. o. in* $[0, \delta]$ ($0 < \delta \leq a$), *in* $[0, \delta]$ *si ha:*

$$g(x) \leq f(x).$$

Supponiamo esista una $g(x)$ ed un x_0, $0 < x_0 \leq \delta$, in cui sia

$$g(x_0) > f(x_0); \tag{4}$$

indicato con $[x_1, x_2]$ ($0 \leq x_1 < x_0 \leq x_2 \leq \delta$) il massimo intervallo (contenente x_0) nell'interno del quale è $g(x) > f(x)$, consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) & \text{per} \quad x \in [x_1, x_2] \\ f(x) & \text{negli altri punti di} \quad [0, \delta], \end{cases}$$

funzione ovviamente assolutamente continua e soddisfacente la (2) q. o. in $[0, \delta]$; in $[0, \delta]$ è inoltre $\varphi(x) \geq f(x)$.

Si ha, q. o. in $[0, \delta]$:

$$\varphi'(x) - f'(x) = F(x, \varphi(x)) - F(x, f(x))$$

da cui, per la (3), (sempre q. o. in $[0, \delta]$:

$$\varphi'(x) - f'(x) \leq M \frac{[\varphi(x) - f(x)]^\alpha}{x^\beta} = M \left[\frac{\varphi(x) - f(x)}{x}\right]^\alpha x^{\alpha - \beta} \tag{5}$$

La (1) d'altra parte assicura che, fissato comunque $\sigma > 0$, esiste un $\lambda > 0$ tale che per ogni $0 < x < \lambda$ risulti:

$$\varphi(x) - f(x) = \int_0^x [F(t, \varphi(t)) - F(t, f(t))] \, dt \leq \sigma x,$$

da cui discende

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - f(x)}{x} = 0. \tag{6}$$

La (6) garantisce l'integrabilità di $\left[\frac{\varphi(t) - f(t)}{t}\right]^\alpha \cdot t^{\alpha - \beta}$ su ogni intervallo $(0, x)$, $0 < x \leq \delta$. Dalla (5) si ha allora:

$$\int_0^x [\varphi'(t) - f'(t)] \, dt \leq M \int_0^x \left[\frac{\varphi(t) - f(t)}{t}\right]^\alpha \cdot t^{\alpha - \beta} \cdot dt$$

da cui

$$\varphi(x) - f(x) \leq \frac{M}{\alpha - \beta + 1} \left[\frac{\varphi(\bar{x}) - f(\bar{x})}{\bar{x}}\right]^\alpha \cdot x^{\alpha - \beta + 1} \qquad (0 < \bar{x} < x \leq \delta). \tag{7}$$

Poiché per la (6) è anche

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\varphi(\bar{x}) - f(\bar{x})}{\bar{x}}\right]^\alpha = 0 \qquad (0 < \bar{x} < x),$$

possiamo porre infine

$$\varphi(x) - f(x) = \psi(x) \cdot x^{\alpha - \beta + 1}, \ [0, \delta], \tag{8}$$

con $\psi(x)$ assolutamente continua in $[0, \delta]$, ivi *non negativa* e $\psi(0) = 0$.

Dalle (8)-(3) abbiamo poi (q. o. in $[0, \delta]$):

$$\varphi'(x) - f'(x) = x^{\alpha-\beta+1} \cdot \psi'(x) + (\alpha - \beta + 1) \cdot x^{\alpha-\beta} \cdot \psi(x) \leq$$

$$\leq L \frac{\varphi(x) - f(x)}{x} = L \cdot x^{\alpha-\beta} \cdot \psi(x),$$

da cui

$$x^{\alpha-\beta+1} \psi'(x) \leq [L - (1 + \alpha - \beta)] \cdot x^{\alpha-\beta} \cdot \psi(x)$$

e perciò (essendo $L \leq 1 + \alpha - \beta$)

$$\psi'(x) \leq 0 \quad \text{q. o. in } [0, \delta].$$

Presi allora comunque $0 \leq x_1 < x_2 \leq \delta$ si ha

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \psi'(x)\, dx \leq 0,$$

cioè $\psi(x)$ è non decrescente in $[0, \delta]$. Da $\psi(0) = 0$ segue perciò $\psi(x) \leq 0$, ed infine (dovendo essere anche $\psi(x) \geq 0$)

$$\psi(x) \equiv 0$$

e cioè

$$\varphi(x) - f(x) \equiv 0, \ [0, \delta],$$

identità questa che contraddice la (4).

Quindi $f(x)$ (in $[0, a]$) è il massimo integrale di (2) uscente da (0, 0).

2. Dimostriamo ora il seguente criterio di unicità:

TEOREMA: *Sia* $F(x, y)$ *definita in* C, *valga l'ipotesi* 1° *del teorema precedente ed inoltre si abbia che:*

2° *Per ogni coppia di funzioni* $y_1(x)$, $y_2(x)$, *a. c. in* $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leq a)$, *con* $y_1(0) = y_2(0) = 0$ *e* $y_1(x) \in E_x$, $y_2(x) \in E_x$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ *per ogni* x *di* $[0, \delta]$, *si verifichi, q. o. in* $[0, \delta]$, *la:*

$$(3') \qquad F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x)) \leq \min \left\{ L \frac{y_2(x) y_1(x)}{x}, M \frac{[y_2(x) - y_1(x)]^\alpha}{x} \right\}$$

con $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, M *costante* > 0, $L \leq 1 + \alpha - \beta$.

Allora la (2) *non può avere (in* $[0, a]$) *più di una soluzione assolutamente continua uscente dal punto* (0, 0).

Supponiamo che esistano due funzioni (distinte) $f(x)$ e $g(x)$ ($f(0) = g(0) = 0$), assolutamente continue in $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leq a)$ e soddisfacenti la $y' = F(x, y)$ q. o. in tale intervallo; sia, ad esempio, $f(x_0) < g(x_0)$ $(0 < x_0 \leq \delta)$.

Poiché la (3') è verificata quando si ponga $f(x)$ in luogo di $y_1(x)$, il teorema del n° 1 ci assicura che in $[0, \delta]$ è $f(x) \geq g(x)$, e ciò in contraddizione con la $f(x_0) < g(x_0)$. Donde la tesi del teorema.

3. Vale infine il seguente

TEOREMA: *Sia* $F(x, y)$ *definita nella striscia*

$$S: 0 \leq x \leq a \quad (a > 0), \quad -\infty < y < +\infty.$$

Supponiamo che:

1° $F(x, y)$ *sia misurabile rispetto ad* x *per ogni fissato valore di* y *e continua rispetto ad* y *per quasi tutti gli* x *di* $[0, a]$;

2° *esista una funzione non negativa* $q(x)$, *sommabile*-L *in* $[0, a]$ *tale che sia*

$$|F(x, y)| \leq q(x);$$

3° *siano verificate le ipotesi* 1) *e* 2) *del precedente criterio di unicità,* E_x *essendo per ogni* x *di* $[0, a]$ *l'intervallo di estremi*

$$l_1 = -\int_0^x q(t)\,dt, \qquad l_2 = -l_1.$$

Allora esiste in $[0, a]$ *una sola funzione a. c. che verifica la* $y' = F(x, y)$ *q. o. in* $[0, a]$.

Infatti per le ipotesi 1) e 2) (che sono poi quelle di Caratheodory [6]) esistono in $[0, a]$ integrale massimo e minimo della $y' = F(x, y)$ (si veda [4], pp. 13–19); il criterio di unicità precedente assicura poi l'unicità in $[0, a]$ della soluzione uscente da $(0, 0)$.

4. Per i sistemi di equazioni differenziali vale il seguente

TEOREMA: *Siano* $F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *funzioni definite in*

$$C: 0 \leq x \leq a \quad (a > 0) \quad , \quad y_1 \in E_x^{(i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

($E_x^{(i)}$ *insiemi numerici chiusi assegnati in corrispondenza ad ogni* x *di* $[0, a]$, $0 \in E_x^{(i)}$)

Supponiamo che:

1° *in corrispondenza ad ogni* $\sigma > 0$ *esista un* $k > 0$ *tale che, per quasi tutti gli* x *di* $[0, k]$, *presi a piacere* $y_r^{(1)}, y_r^{(2)} \in E_x^{(r)}$ *con* $-k \leq y_r^{(1)} \leq k$, $-k \leq$ $\leq y_r^{(2)} \leq k$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$, *risulti:*

$$\{1\} \qquad F_i(x, y_r^{(2)}, \cdots, y_n^{(2)}) - F_i(x, y_1^{(1)}, \cdots, y_n^{(1)}) \leq \sigma, \quad (i = 1, \cdots, n);$$

2° $y_i = f_i(x)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, *definite in* $[0, a]$, *ivi assolutamente continue, con* $f_i(0) = 0$, $f_i(x) \in E_x^{(i)}$, *soddisfino quasi ovunque in* $[0, a]$ *il sistema differenziale*

$$\{2\} \qquad y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

3° *qualunque siano le* $y_i(x)$, *a. c. in* $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leq a)$, $y_i(0) = 0$, $y_i(x) \in E_x^{(i)}$, *si verifichino quasi ovunque in* $[0, \delta]$ *le*

$$\{3\} \qquad F_i(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) - F_i(x, f_1(x), \cdots, f_n(x)) \leq$$

$$\leq \min\left\{ L\frac{\varphi(x)}{x}, M\frac{[\varphi(x)]^\alpha}{x^\beta} \right\}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

con

$$\varphi(x) = \max\{\max_i (y_i(x) - f_i(x)), 0\}$$

e $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, M *costante* > 0, $L \leq 1 + \alpha - \beta$.

Allora se le $g_i(x)$ (*a. c.*, $g_i(0) = 0$, $g_i(x) \in E_x^{(i)}$) *verificano le* $\{2\}$ *q. o. in* $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leq a)$, *in* $[0, \delta]$ *si ha:*

$$g_i(x) \leq f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Con ragionamento analogo a quello fatto nel n° 1 si prova infatti che esiste una funzione $\psi(x)$, a. c. in $[0, \delta]$, ivi non negativa, con $\psi(0) = 0$, tale che sia

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot x^{\alpha - \beta + 1}$$

e che questa funzione $\psi(x)$ è identicamente nulla, per cui in $[0, \delta]$ è

$$\varphi(x) \equiv 0$$

e cioè

$$g_i(x) - f_i(x) \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

5. Nel teorema precedente le $\{3\}$ siano sostituite con le

$$\{3'\} \qquad F_i(x, f_1(x), \cdots, f_n(x)) - F_i(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \leq$$

$$\leq \min\left\{ L\frac{\varphi_1(x)}{x}, M\frac{[\varphi_1(x)]^\alpha}{x^\beta} \right\}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

dove

$$\varphi_i(x) = \max\{\max_i (f_1(x) - y_i(x)), 0\},$$

ferme restando le altre ipotesi.

Allora se le $g_i(x)$ (*a. c.*, $g_i(0) = 0$, $g_i(x) \in E_x^{(i)}$) *verificano le* $\{2\}$ *q. o. in* $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leq a)$, *in* $[0, \delta]$ *si ha:*

$$g_i(x) \geq f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Segue subito che, quando siano verificate contemporaneamente le $\{3\}$ e $\{3'\}$, si ha, in tutto un intorno destro di $x = 0$, l'*unicità* della soluzione uscente $(0, 0, \cdots, 0)$ (2).

6. Valgono ovviamente teoremi (analoghi di quelli finora dimostrati) relativi ad un intorno sinistro di $x = 0$; e questo tanto per l'equazione (2) che per i sistemi $\{2\}$.

(2) Per quest'ultima proposizione si veda anche [7].

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II. Ed. Zanichelli, Bologna (1948).

[2] U. BARBUTI, *Sull'integrale massimo e minimo e sulla unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. III, pp. 272–276 (1947).

[3] L. MERLI, *Un teorema di unicità locale per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* $x' = f(x, t)$, « Rivista di Mat. dell'Univ. di Parma », ser. 2ª, vol. 2°, pp. 61–65 (1° Semestre 1961).

[4] F. CAFIERO, *Sui teoremi di unicità relativi ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. 78, pp. 10–41 e 193–215 (1948).

[5] E. GAGLIARDO, *Teoremi di unicità per le soluzioni di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, « Rend. Acc. di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », ser. 4ª, vol. XXII, pp. 181–192 (1955).

[6] C. CARATHEODORY, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, « Zweite Auflage, Berlin », pp. 665–674 (1927).

[7] E. A. CODDINGTON–N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*. Mc Graw–Hill Book Company, New York, pp. 48–49 (1955).