Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

E. Arghiriade

Sur les matrices qui sont permutables avec leur inverse généralisée

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.5, p. 244–251.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_244_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Algebra. — *Sur les matrices qui sont permutables avec leur inverse généralisée.* Nota di E. ARGHIRIADE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. La notion de matrice inverse a été généralisée par E. H. Moore [1] pour une matrice rectangulaire quelconque; indépendamment des travaux de E. H. Moore cette généralisation a été retrouvé par A. Bjerhammar [2] et R. Penrose [3], [4]; le premier a défini l'inverse généralisée d'une matrice rectangulaire de rang maximal (le rang est égal à la plus petite dimension de la matrice) et le second l'inverse généralisée d'une matrice rectangulaire quelconque.

Les définitions données par ces trois auteurs pour l'inverse généralisée d'une matrice sont equivalentes. Voici la definition donnée par R. Penrose [3; p. 406]: étant donnée la matrice $A\,(p \times n)$, dont les éléments sont des nombres complexes, le système:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} AXA &= A \quad ; \quad XAX = X \,; \\ (AX)^* &= AX \quad ; \quad (XA)^* = XA \,, \end{aligned}$$

(A^* est la matrice transposée et complexe conjuguée de A ; $A^* = \bar{A}'$) admet toujours une solution *unique* $X\,(n \times p)$ qui est *l'inverse généralisée* de A; nous représenterons l'inverse généralisée par $A^{(-1)}$, sauf le cas ou A est carré et non–singulière quand nous employerons la notation habituelle A^{-1}. Si la matrice $A_1\,(p \times r)$ est *verticale* et de *rang maximal* ($p \geq r$; rang $A = r$) alors on a:

$$\text{(2)} \qquad A_1^{(-1)} = (A_1^* A_1)^{-1} A_1^* \quad , \quad A_1^{(-1)} A_1 = E_r \,;$$

si la matrice $A_2\,(r \times n)$ est *horizontale* et de *rang maximal* ($r \leq n$; rang $A = r$), alors on a

$$\text{(3)} \qquad A_2^{(-1)} = A_2^* (A_2 A_2^*)^{-1} \quad ; \quad A_2 A_2^{(-1)} = E_r \,,$$

E_r étant la matrice unité d'ordre r, les matrices $A_1^* \,.\, A$ et $A_2 \,.\, A_2^*$ étant des matrices d'ordre r non–singulières; les formules (2) et (3) sont dues à A. Bjerhammer [2; p. 190 et 193].

Si $A\,(p \times n)$ est une matrices quelconque de rang r, son inverse généralisée se calcule par la formule [5; p. 40]:

$$\text{(4)} \qquad A^{(-1)} = A_2^{(-1)} \delta A_1^{(-1)} \,,$$

A_1 (ou A_2) étant une sous matrice de A formée par r colonnes (ou lignes) quelconques linéairement indépendantes de A, et δ étant formée par les éléments communs à A_1 et A_2 ; les matrices $A_1^{(-1)}\,(r \times p)$ et $A_2^{(-1)}\,(n \times r)$ se calculent par (2) et (3) respectivement.

Une nouvelle définition de l'inverse généraliseé se trouve dans [8].

2. De la première relation (1) on déduit rang $A \leq$ rang X et de la seconde rang $X \leq$ rang A, donc rang $A =$ rang X. On a évidemment rang $AX \leq$ rang A et de la première relation (1), $AXA = A$, il en résulte rang $A \leq$ rang AX, donc rang $AX =$ rang A. On a donc

$$\text{(5)} \qquad \text{rang } A = \text{rang } A^{(-1)} = \text{rang } AA^{(-1)} = \text{rang } A^{(-1)} A.$$

(*) Nella seduta del 9 novembre 1963.

LEMME 1. – *Dans une matrice de rang r, les éléments communs à r lignes quelconques linéairement indépendantes et à r colonnes quelconques linéairement indépendantes, forment une matrice d'ordre r, non-singulière.* Soit rang $A = r$; de (5) on a rang $A^{(-1)} = r$ et de (4) il résulte rang $\delta \geq$ rang $A^{(-1)}$ et comme δ est une matrice d'ordre r, il s'ensuit rang $\delta = r$.

3. Considérons la matrice $A\,(p \times n)$, de rang r, et posons $A = (a_{ik})_p^n$. Supposons que les lignes de rang $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ sont linéairement indépendantes et forment la sous matrice $A_2\,(r \times n)$ de A; alors toute ligne de A

$$l_\alpha = (a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \cdots, a_{\alpha n}), \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, p)$$

est une combinaisons linéaire de $l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_r}$

$$l_\alpha = \mu_{\alpha 1} l_{i_1} + \mu_{\alpha 2} l_{i_2} + \cdots + \mu_{\alpha r} l_{i_r}, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, p); \tag{6}$$

les nombres $\mu_{\alpha 1}, \mu_{\alpha 2}, \cdots, \mu_{\alpha r}$ sont les *coefficients de structure* de la ligne de rang α par rapport à A_2 et (6) détermine d'une manière unique ces coefficients.

Formons maintenant une matrice $\mu_1\,(p \times r)$ dans laquelle la ligne de rang α est formée par les coefficients de structure de la ligne de rang α de A (par rapport à A_2)

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \mu_{11} \cdots \mu_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \mu_{p1} \cdots \mu_{pr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ E_r \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{7}$$

les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ de μ_1 formant la matrice unité, E_r; μ_1 est *le module de structure des lignes de* A *par rapport à* A_2; on a $p \geq r$, rang $\mu_1 = r$; la matrice μ_1 est verticale et de rang maximal et $\mu_1^{(-1)}$ se calcule avec (2).

Supposons que les colonnes de rang $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ sont linéairement indépendantes et forment la sous matrice $A_1\,(p \times r)$ de A; on définit d'une manière analogue la matrice $\mu_2\,(r \times n)$ qui est *le module de structure des colonnes de* A *par rapport à* A_1, la colonne de rang β de μ_2 étant formée par les coefficients de structure de la colonne de rang β de A par rapport à A_1:

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \mu'_{11} \cdots \mu'_{n1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu'_{1r} \cdots \mu'_{nr} \end{pmatrix} = (\cdots E_r \cdots), \tag{8}$$

les colonnes de rang $j_1, j_2, \cdots, j_r$ de μ_2 formant la matrice unité, E_r; on a $r \leq n$, rang $\mu_2 = r$; la matrice μ_2 est horizontale et de rang maximal et $\mu_2^{(-1)}$ se calcule avec (3).

Les modules des structure ont deja été employés par I. Proskuriakov [7] et T. N. E. Greville [6; pag. 15].

4. Considérons deux modules de structure μ_1 et μ_2 d'une matrice A, μ_1 (ou μ_2) étant le module de structure des lignes (on des colonnes) de A par rapport à une sous matrice A_2 (ou A_1) de A; les éléments communs à A_1

et A_2 forment la sous matrice δ d'ordre r de A, et (lemme 1), det $\delta \neq 0$: par conséquant det δ est un déterminant principal de A. Donc *deux modules de structure* μ_1 *et* μ_2 *sont associés à un déterminant principal det* δ.

Réciproquement, étant donné le déterminant principal det δ, en prolongeant les colonnes (les lignes) de δ on obtient la sous matrice A_1 (ou A_2) qui a le rang r; les lignes (les colonnes) de A admettent un module de structure μ_1 (ou μ_2) par rapport à A_2 (ou A_1); par conséquent, *à chaque déterminant principal det* δ *on peut associer deux modules de structure* μ_1 *et* μ_2 définis comme on vient de le voire.

5. Les modules μ_1 et μ_2 vérifient les relations connus [6], [7]:

$$A = \mu_1 A_2 = A_1 \mu_2 , \tag{9}$$

où μ_1 (ou μ_2) est le module de structure des lignes (des colonnes) de A par rapport à A_2 (ou A_1).

Pour démontrer la première relation (9) on remarque que de (6) on déduit pour les éléments $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \cdots, a_{\alpha n}$ de la ligne l_α de A:

$$a_{\alpha s} = \mu_{\alpha 1} a_{i_1 s} + \mu_{\alpha 2} a_{i_2 s} + \cdots + \mu_{\alpha r} a_{i_r s} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, p\,; s = 1, 2, \cdots, n); \tag{10}$$

réciproquement, de (10) on déduit (6); en calculant le produit des matrices $\mu_1 (p \times r)$ et $A_2 (r \times n)$ on trouve, en tenant compte soit de la formule (7) qui donne μ_1 que de (10), la première formule (9); la seconde s'établit d'une manière analogue.

6. On ne connait pas de règle générale donnant l'inverse géneralisée d'un produit de matrices. Un cas particulier a été indiqué par R. Penrose [3; page 408], qui a montré que $(A^* \cdot A) = A^{(-1)} A^{*(-1)}$. Un autre cas particulier est indiqué ci-dessous.

LEMME 2. – *Considérons les matrices* $B_1 (p \times n)$ *et* $B_2 (n \times q)$ *pour lesquelles:*

$$\text{rang } B_1 = \text{rang } B_2 = n\,; \tag{11}$$

alors on a: $(B_1 B_2)^{(-1)} = B_2^{(-1)} \cdot B_1^{(-1)}$.

De (11) on déduit $p \geq n$ et $n \leq q$; donc $B_1^{(-1)}$ se calcule avec (2) et $B_2^{(-1)}$ avec (3).

Notons $C = B_1 B_2$ et $Z = B_2^{(-1)} B_1^{(-1)}$; il suffit de montrer que C et Z vérifient les relations (1). En tenant compte de (2), de (3) et de (1), on a:

$$CZC = B_1 (B_2 B_2^{(-1)}) (B_1^{(-1)} B_1) B_2 = B_1 E_n E_n B_2 = B_1 B_2 = C ,$$

$$ZCZ = B_2^{(-1)} (B_1^{(-1)} B_1) (B_2 B_2^{(-1)}) B_1^{(-1)} = B_2^{(-1)} E_n E_n B_1^{(-1)} = B_2^{(-1)} B_1^{(-1)} = Z ,$$

$$CZ = B_1 (B_2 B_2^{(-1)}) B_1^{(-1)} = B_1 E_n B_1^{(-1)} = B_1 B_1^{(-1)} ,$$

$$ZC = B_2^{(-1)} (B_1^{(-1)} B_1) B_2 = B_2^{(-1)} E_n B_2 = B_2^{(-1)} B_2 ;$$

et, comme d'après les dernières formules (1) on a $(B_1 B_1^{(-1)})^* = B_1 B_1^{(-1)}$ et $(B_2^{(-1)} B_2)^* = B_2^{(-1)} B_2$, on en déduit $(CZ)^* = CZ$ et $(ZC)^* = ZC$. Donc $Z = C^{(-1)} = (B_1 B_2)^{(-1)}$.

7. Revenons aux formules (9) et remarquons que $\mu_1\,(p \times r)$ et $A_2\,(r \times n)$ vérifient les conditions du lemme 2 et aussi $A_1\,(p \times r)$ et $\mu_2\,(r \times n)$. Donc, en appliquant le lemme 2 aux formules (9), on obtient

$$A^{(-1)} = A_2^{(-1)}\,\mu_1^{(-1)} = \mu_2^{(-1)}\,A_1^{(-1)}, \tag{12}$$

et, en tenant compte de (9), (12), (2) et (3), il en résulte:

$$\left\{\begin{aligned} AA^{(-1)} &= \mu_1\,(A_2 A_2^{(-1)})\,\mu_1^{(-1)} = \mu_1\,E_n\,\mu_1^{(-1)} = \mu_1\,\mu_1^{(-1)}, \\ A^{(-1)}A &= \mu_2^{(-1)}\,(A_1^{(-1)}\,A_1)\,\mu_2 = \mu_2^{(-1)}\,E_n\,\mu_2 = \mu_2^{(-1)}\,\mu_2\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

En remplacant $\mu_1^{(-1)}$, $\mu_2^{(-1)}$ par les valeurs déduites de (2) et (3), on a:

$$\left\{\begin{aligned} AA^{(-1)} &= \mu_1\,(\mu_1^*\,\mu_1)^{-1}\,\mu_1^*, \\ A^{(-1)}A &= \mu_2^*\,(\mu_2\,\mu_2^*)^{-1}\,\mu_2\,. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

8. LEMME 3. – *Une matrice* $A\,(n \times n)$ *de rang* r, *qui permute avec son inverse généralisée, admet au moins un mineur principal d'ordre* r *non nul.*

Une matrice $A\,(p \times n)$ admet une matrice inverse $A^{(-1)}\,(n \times p)$ et, si $A \cdot A^{(-1)} = A^{(-1)} \cdot A$, on doit avoir $p = n$; donc une matrice permutable avec son inverse généralisée est necessairement quadratique.

Posons $AA^{(-1)} = B$. On a de (5) rang $B = r$ et, d'après les dernières formules (1), $B^* = B$; donc $B\,(n \times n)$ étant hermitienne, admet [7; p. 90, exerc. 631] un mineur principal M, d'ordre r non nul; supposons que M est formé par les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ et par les colonnes de même rang. Soit A_2 la sous matrice de A formée par les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ et soit C_1 la sous matrice de $A^{(-1)}$ formée par les colonnes de même rang; d'après la formule de Binet–Cauchy, $M = \sum\limits_i \delta_i\,\Delta_i$ où on fait la somme pour tous les déterminants δ_i, d'ordre r, qu'on peut déduire de A_2, et Δ_i représentent les déterminants correspondant de C_1; comme $M \neq 0$, on déduit que A_2 a le rang r. Mais on a aussi $B = A^{(-1)}A$ et soit A_1 la sous matrice de A formée par les colonnes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ en raisonnant comme plus haut on déduit que A_1 a aussi le rang r.

D'après le lemme 1, les éléments communs à A_1 et A_2 forment une matrice d'ordre r, δ, qui est non–singulière; le determinant non nul de δ est un mineur principal de A, puisqu'il est formé par les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ et par les colonnes de même rang.

9. En général une matrice carrée quelconque $A\,(n \times n)$ n'est pas permutable avec son inverse généralisée; un cas particular a été indiqué par R. Penrose [3; p. 408] qui a montré que, si A est normale ($AA^* = A^*A$), alors $A^{(-1)}A = AA^{(-1)}$. Il n'est pas faite aucune mention dans l'article [3] concernant le théorème réciproque; l'exemple suivant prouve que *le théorème réciproque n'est pas vrai.*

Soit la matrice d'ordre 4 et de rang 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \det \delta \neq 0.$$

Soit A_1 (ou A_2) la sous matrice de A formée par les deux premières colonnes (lignes):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas normale, car

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Des formules (2) et (3) on déduit

$$A_1^{(-1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2^{(-1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et de (4)

$$A^{(-1)} = A_2^{(-1)} \delta A_1^{(-1)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

quoique A n'est pas normale, elle permute pourtant avec son inverse généralisée:

$$AA^{(-1)} = A^{(-1)}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. THÉORÈME. – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice* $A(n \times n)$, *de rang* r, *soit permutable avec sont inverse généralisée, est qu'elle admette un déterminant principal dont les modules de structure vérifient la relation*

$$\mu_1 = \mu_2^* . \tag{15}$$

La condition est suffisante, comme il résulte des formules (14) et (15). Pour démontrer qu'elle est aussi nécessaire, remarquons que, si A permute avec son inverse généralisée, elle admet, d'après la lemme 2, un mineur principal d'ordre r, $M \neq 0$, et supposons que M est formé par les lignes de rang

$i_1, i_2, \cdots, i_r$ et par les colonnes de même rang; en prolongeant les lignes et les colonnes de M, on obtient dans A respectivement les sous matrices A_2 et A_1 et soit μ_1 (et μ_2) le module de structure des lignes (des colonnes) de A par rapport à A_2 (ou A_1); d'après (7) et (8), les lignes (les colonnes) de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ de μ_1 (ou μ_2) forment la matrice E_r.

En effectuant le produit $\mu_1 \mu_1^{(-1)}$, et en tenant compte de ce que les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ de μ_1 forment la matrice unité E_r, et d'après la règle de multiplication des matrices, il en résulte que *dans* $\mu_1 \mu_1^{(-1)}$ *les lignes de rang* $i_1, i_2, \cdots, i_r$ *forment la matrice* $\mu_1^{(-1)}$.

En effectuant le produit $\mu_2^{(-1)} \mu_2$, et en tenant compte de ce que dans μ_2 les colonnes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ forment la matrice unité E_r, il en résulte que dans ce produit $\mu_2^{(-1)} \mu_2$, les colonnes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ forment la matrice $\mu_2^{(-1)}$.

Mais, d'après les dernières formules (1), la matrice $\mu_2^{(-1)} \mu_2$ est hermitienne, $\mu_2^{(-1)} \mu_2 = [\mu_2^{(-1)} \mu_2]^*$, et alors *les lignes de rang* $i_1, i_2, \cdots, i_r$ *de* $\mu_2^{(-1)} \mu_2$ *forment la matrice* $[\mu_2^{(-1)}]^*$ et d'après un résultat de R. Penrose [3; p. 408] on a $[\mu_2^{(-1)}]^* = \mu_2^{*(-1)}$.

Mais, si $AA^{(-1)} = A^{(-1)} \cdot A$, il en résulte de (13) qu'on doit avoir $\mu_1 \mu_1^{(-1)} = \mu_2^{(-1)} \mu_2$; en écrivant que dans les deux membres les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ sont composées des mêmes éléments, on déduit, d'après ce qu'on a établi plus haut, que $\mu_1^{(-1)} = \mu_2^{*(-1)}$, d'où résulte la formule (15).

REMARQUE 1. – Il résulte de ce qui précède que, si la matrice A, de rang r, permute avec $A^{(-1)}$, elle admet au moins un mineur principal d'ordre r non nul; et que, pour tout mineur principal d'ordre r de A non nul, ses modules de structure vérifient (15).

Quant aux mineurs d'ordre r non nuls qui sont non-principaux, leurs modules de structure peuvent vérifier on ne pas vérifier la relation (15), comme nous allons le voir.

Dans l'exemple du nr. 8, soit M_1 le mineur dont les éléments appartiennent aux deux premières lignes et aux deux dernières colonnes; M_1 est un mineur non-principal et pourtant ses modules de structure vérifient (15), car on a:

$$\mu_1' = \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le même exemple, soit M_2 le mineur dont les éléments appartiennent à la seconde et troisième ligne et aux deux premières colonnes; M_2 est un mineur non-principal et ses modules de structure ne vérifient pas (15), car on a

$$\mu_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1' \neq \mu_2.$$

REMARQUE 2. – Soit la matrice A ($n \times n$), de rang r, qui permute avec $A^{(-1)}$; soit det δ un mineur principal d'ordre r de A non nul; *si* δ *est une matrice hermitienne* ($\delta = \delta^*$), *alors* A *est aussi hermitienne* ($A = A^*$) comme il résulte facilement de (15).

11. Finalement, nous allons indiquer une formule pour le calcul de $A^{(-1)}$ à l'aide de μ_1 et μ_2. Soit la matrice A $(p \times n)$, de rang r, dans laquelle les lignes de rang $i_1, i_2, \cdots, i_r$ sont linéairement indépendantes et forment la sous matrice A_2 et les colonnes de rang $j_1, j_2, \cdots, j_r$ sont linéairement indépendantes et forment la sous matrice A_1; les éléments communs à A_1 et A_2 forment la sous matrice δ pour laquelle (lemme 1) det $\delta \neq 0$.

La ligne l_α de A s'exprime linéairement à l'aide des lignes $l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_r}$ de A par les formules (6) et avec les coefficients $\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}, \cdots, \mu_{\alpha_n}$. Les éléments de l_α s'expriment à l'aide des éléments correspondants des lignes $l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_r}$ par les formules (10); en particulier, les éléments de la ligne de rang α de A_1 s'expriment linéairement par les mêmes formules (10) à l'aide des éléments correspondants des lignes de δ; on en déduit que la ligne de rang α de A_1 s'exprime par les formules (6) comme une combinaison linéaire des lignes de δ (les lignes de δ étant linéairement indépendantes); donc les coefficients de structure de la ligne de rang α de A_1 par rapport à δ sont $\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}, \cdots, \mu_{\alpha_r}$ et, par conséquant, le module de structure de A_1 par rapport à δ est précisément μ_1 et, d'après la première formule (9) appliquée cette fois–ci à A_1 et δ, on a

$$A_1 = \mu_1 \delta, \tag{16}$$

et d'une manière analogue

$$A_2 = \delta \mu_2 . \tag{17}$$

De (9), (16), (17) il s'ensuit:

$$\boxed{A = \mu_1 \delta \mu_2} .$$

Posons $\lambda = \mu_1 \delta$; les matrices $\mu_1 (p \times r)$ et $\delta (r \times r)$ vérifient les conditions du lemme 2, aussi bien que les matrices $\lambda (p \times r)$ et $\mu_2 (r \times n)$. Donc, en appliquant le lemme 2:

$$A^{(-1)} = (\lambda\mu_2)^{(-1)} = \mu_2^{(-1)} \lambda^{(-1)} = \mu_2^{(-1)} \delta^{-1} \mu_1^{(-1)} ;$$

il résulte:

$$\boxed{A^{(-1)} = \mu_2^{(-1)} \delta^{-1} \mu_1^{(-1)}} ,$$

les matrices $\mu_1^{(-1)}$, $\mu_2^{(-1)}$ se calculant avec (2) et (3) respectivement et δ étant non singulière.

12. On démontre facilement à l'aide de (15) qu'une matrice permutable avec son inverse généralisée est une matrice EP_r, [9], et réciproquement, une matrice EP_r étant une matrice pour laquelle une relation de dépendance linéaire quelconque entre un certain nombre de lignes, entraîne une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de même rang avec de coefficients complexes conjugués (Je dois cette remarque à E. Boroș).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. H. MOORE, *General Analysis*, Part. I, «Mem. Amer. Philos. Soc.», *1*, 197–209 (1935).

[2] A. BJERHAMMAR, *Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculation*, « Bull. Géodésique », 188–220 (1951).

[3] R. PENROSE, *A generalised inverse for matrices*, « Proc. Cambridge Philos. Soc. », *51*, 406–413 (1955).

[4] R. RADO, *Note on generalized inverses of matrices*, Ibid., *52*, 600–601 (1956).

[5] T. N. E. GREVILLE *The pseudo inverse of a rectangular or singular matrix and its applications to the solution of systems of linear equations*, « SIAM Review », *1* (nr. 1), 38–43 (1959).

[6] T. N. E. GREVILLE, *Some applications of the pseudoinverse of a matrix*, « SIAM Review », *2* (nr. 1), 15 (1960).

[7] I. PROSKOURIAKOV, *Recueil de problèmes d'Algèbre linéare*, Moscou 1962 (en langue russe), p. 124, exerc. 939.

[8] E. ARGHIRIADE et A. DRAGOMIR, *Une nouvelle définition de l'inverse généralisée d'une matrice* « Acad. Naz. dei Lincei », 1963, vol. XXX, fasc. 3–4.

[9] MARTIN PEARL, *On normal and* EP_r *matrices*. Michigan «Math. J.», vol. VI, n. 1, 1959, pp. 1–5.