
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE EVANGELISTI

Sopra le trasformate di Laplace dei problemi di propagazione

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.5, p. 211–217.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_211_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sopra le trasformate di Laplace dei problemi di propagazione.* Nota (*) del Corrisp. GIUSEPPE EVANGELISTI.

1. La presente Nota considera il metodo della trasformazione di Laplace per la propagazione unidimensionale in un mezzo non uniforme, lineare e invariabile nel tempo. L'unica condizione imposta (in aggiunta, naturalmente, alla trasformabilità delle soluzioni) è che i parametri del mezzo varino col posto in modo continuo. Si indaga la natura delle soluzioni nel dominio delle trasformate (che sarà indicato, conforme all'uso, come dominio immagine, o dominio della variabile complessa s , in contrapposto al dominio oggetto, o dominio del tempo t , delle soluzioni effettive), e si riconosce: che il mezzo è caratterizzato da quattro funzioni intere di s ; che le soluzioni immagini si ottengono da esse per mezzo di operazioni razionali e sono, quindi, funzioni meromorfe; che una violazione a questo carattere delle soluzioni può provenire soltanto dalle condizioni al contorno.

2. L'attenzione viene concentrata sopra una linea elettrica invariabile nel tempo, non uniforme, di lunghezza l , distesa lungo l'asse delle ascisse x , del quale occupa l'intervallo $(0, l)$ con inizio (o ingresso) in $x = 0$ e termine (o uscita) in $x = l$. Sono presenti tutti e quattro i parametri elettrici (supposti lineari): l'induttanza $\mathcal{L}(x)$, la resistenza $\mathcal{R}(x)$, la capacità $\mathcal{C}(x)$, la dispersione per imperfetto isolamento $\mathcal{G}(x)$ dell'unità di lunghezza di linea. Nei problemi usuali il mezzo è passivo, così che le quattro funzioni sono non negative; occorre e basta, per i successivi sviluppi, che esse siano continue nell'intervallo $0 \leq x \leq l$.

La linea sia libera da sorgenti distribuite e consenta la messa in equazione « alla Kirchhoff ». Il fenomeno è allora governato dal sistema differenziale a derivate parziali in due funzioni incognite — la tensione $v(x, t)$ e la corrente $i(x, t)$ — delle due variabili indipendenti x e t :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathcal{L} \frac{\partial i}{\partial t} + \mathcal{R}i = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{G}v = 0. \end{cases}$$

Un siffatto sistema (iperbolico, come tutti sanno, se i parametri $\mathcal{L}$ e $\mathcal{C}$ non sono entrambi nulli, parabolico in caso diverso) non consente l'eliminazione di una delle due incognite, anche prescindendo dalle ulteriori restrizioni da imporre ai coefficienti. Il fatto non incide sulla trattazione, ma dà lo spunto per rilevare che in casi particolari ($\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ proporzionali fra loro per eliminare

(*) Presentata nella seduta del 9 novembre 1963.

la i , $\mathcal{C}$ e $\mathcal{G}$ proporzionali fra loro per eliminare la v) l'eliminazione è possibile e dà luogo a una equazione del secondo ordine del tipo

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \left\{ \alpha(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(x) u \right\} = 0.$$

Questa equazione, che rappresenta una vasta gamma di fenomeni di propagazione, può quindi considerarsi come un caso particolare del sistema (1).

3. Il sistema a derivate parziali (1) viene trasferito nel dominio delle trasformate di Laplace supponendo che nell'istante iniziale la tensione e la corrente lungo tutta la linea siano identicamente nulle; l'ipotesi non contiene, come si vedrà subito, restrizioni sostanziali ed è la più adatta per individuare le caratteristiche interne del mezzo.

Le incognite $v(x, t)$ e $i(x, t)$ siano trasformabili, e le relative trasformate si scrivano

$$V(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} v(x, t) dt \quad I(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} i(x, t) dt.$$

Il sistema (1) dà luogo, nel dominio immagine, al sistema differenziale ordinario

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dx} + (\mathcal{L}s + \mathcal{R}) I = 0 \\ \frac{dI}{dx} + (\mathcal{C}s + \mathcal{G}) V = 0 \end{cases}$$

i cui coefficienti sono, entro tutto l'intervallo di definizione $0 \leq x \leq l$, continui nell'argomento reale x e razionali interi nel parametro complesso s . Un tale sistema, associato a una coppia di valori di V e I , indipendenti da s , dati nell'estremo $x = 0$, ammette una ed una sola coppia di soluzioni le quali riescono continue in x e analitiche intere in s ⁽¹⁾.

(1) La dimostrazione discende direttamente dal metodo delle approssimazioni successive. Conviene, forse, darne breve cenno ricordando il caso generale in cui rientra il sistema (3).

Si considera, nell'intervallo $0 \leq x \leq l$, il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$(a) \quad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{im} y_m + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in cui i coefficienti a_{ij} e i termini noti b_i sono nell'intervallo medesimo, estremi compresi, funzioni continue nell'argomento reale x e analitiche intere nel parametro complesso s . La n^{ma} approssimazione delle soluzioni $y_i(x, s)$ che soddisfano ai dati di Cauchy

$$y_i(0) = y_i^{(0)}$$

si scrive

$$y_i^{(n)}(x, s) = y_i^{(0)} + \int_0^x \{ a_{i1}(\xi, s) y_1^{(n-1)}(\xi, s) + \dots + a_{im}(\xi, s) y_m^{(n-1)}(\xi, s) + b_i(\xi, s) \} d\xi.$$

Il carattere delle $y_i^{(n)}$ è deciso dagli integrali a secondo membro, i quali, a loro volta, hanno lo stesso carattere delle funzioni a_{ij} e b_i ; sono, cioè, continui in x e analitici interi in s . Altrettanto succede, in forza del teorema di Weierstrass, per le soluzioni $y_i(x, s)$, dato che le ipotesi

4. Le condizioni all'estremo $x = 0$ siano costituite dai valori uno per $V(0, s)$ e zero per $I(0, s)$; le corrispondenti soluzioni siano $Q(x, s)$ per la V e $-P(x, s)$ per la I . Una seconda coppia di soluzioni, linearmente indipendente dalla prima, è data dalle condizioni d'estremo $V(0, s)$ nulla e $I(0, s)$ unitaria; sia essa costituita dalle funzioni $-N(x, s)$ per V e $M(x, s)$ per I . Indipendentemente dal problema delle determinazioni esplicite, è accertato che queste due coppie di soluzioni esistono, continue nella variabile x e analitiche intere nel parametro s , entro tutto l'intervallo $0 \leq x \leq l$. Ne segue l'integrale generale attraverso la solita procedura di sovrapposizione di effetti valida per i sistemi differenziali lineari omogenei. Vengono così costruite, nel dominio immagine, le equazioni della linea riguardata come un quadripolo, secondo lo schema della fig. 1: i morsetti d'ingresso del quadripolo sono nell'origine della linea, quelli d'uscita sono posti all'ascissa x , con x lasciata corrente fra 0 e l .

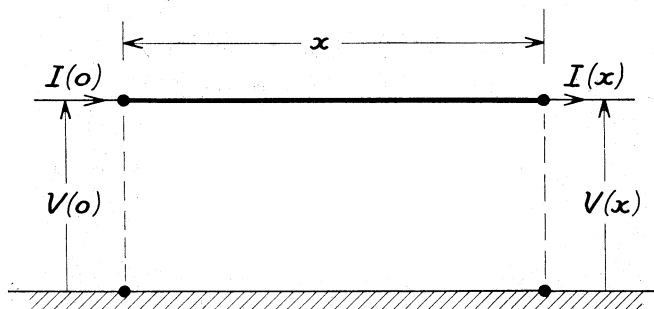


Fig. 1.

Per chiarezza e risparmio d'ingombro, l'argomento s , che compare in tutte le funzioni, sarà d'ora in avanti sottinteso.

Le condizioni all'estremo $x = 0$

$$V(0) = V_i \quad I(0) = 0$$

fatte assicurano la convergenza uniforme delle $y_i^{(n)}(x, s)$ verso il limite delle rispettive $y_i(x, s)$ per ogni x in $(0, l)$ e per qualunque s .

La presenza, nel sistema considerato, dei termini noti b_i risolve anche il problema delle condizioni iniziali non nulle. Se $v(x, 0)$ e $i(x, 0)$ sono le distribuzioni iniziali della tensione e della corrente lungo la linea, il sistema (3) cede il posto al sistema non omogeneo

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + (\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}) I = \mathfrak{L}i(x, 0) \\ \frac{\partial I}{\partial x} + (\mathfrak{C}s + \mathfrak{G}) V = \mathfrak{C}v(x, 0) \end{cases}$$

che ammette le stesse conclusioni del testo, sotto la sola condizione che le funzioni di x $v(x, 0)$ e $i(x, 0)$ siano continue.

Per ulteriori dettagli si rimanda ai trattati speciali. Vedansi, ad esempio: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Bologna, Zanichelli, 1941, Capp. I e II; F. TRICOMI, *Equazioni differenziali*. Torino, Einaudi, 1948, Cap. I; E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, London, Longmans, 1926 - Dover Publications, 1950, Cap. III.

dove V_i è un'assegnata funzione di s , rappresentano una linea con i morsetti d'ingresso lasciati aperti. Le corrispondenti soluzioni si scrivono

$$(4) \quad \begin{cases} V_a(x) = Q(x) V_i \\ I_a(x) = -P(x) V_i. \end{cases}$$

Analogamente, il caso della condizione all'estremo $x = 0$

$$V(0) = 0 \quad I(0) = I_i$$

dove I_i indica un'assegnata funzione di s , corrisponde ai morsetti d'ingresso in corto circuito ed ammette la coppia di soluzioni

$$(5) \quad \begin{cases} V_c(x) = -N(x) I_i \\ I_c(x) = M(x) I_i. \end{cases}$$

Ne seguono, sempre per sovrapposizione di effetti, le equazioni del quadripolo costituito dal tronco $0, x$ di linea:

$$(6) \quad \begin{cases} V(x) = Q(x) V(0) - N(x) I(0) \\ I(x) = -P(x) V(0) + M(x) I(0). \end{cases}$$

Esse attestano che le grandezze d'entrata e d'uscita del quadripolo sono legate fra loro da una trasformazione lineare omogenea i cui quattro coefficienti (che vengono usualmente indicati come parametri generali del quadripolo) sono funzioni analitiche intere di s . Alcune proprietà di tali funzioni sono già in evidenza. Le funzioni M e Q sono numeri puri ed assumono il valore uno per $x = 0$; le funzioni N e P hanno, rispettivamente, le dimensioni di un'impedenza e di un'ammettenza e si annullano per $x = 0$. Altre proprietà ricadono in quelle comuni a tutti i quadripoli passivi: il determinante dei coefficienti delle (6) è identicamente uguale all'unità; vale cioè la relazione

$$(7) \quad M(x) Q(x) - N(x) P(x) = 1$$

la quale assicura che la corrispondente trasformazione lineare non cade mai in difetto ⁽²⁾. Se il tronco $(0, x)$ di linea è simmetrico rispetto all'ascissa media risulta, identicamente,

$$M(x) = Q(x).$$

In forza delle proprietà (7), le equazioni (6) possono scriversi nella forma

$$(8) \quad \begin{cases} V(0) = M(x) V(x) + N(x) I(x) \\ I(0) = P(x) V(x) + Q(x) I(x) \end{cases}$$

che mette in evidenza le grandezze d'entrata.

(2) La (7) esprime, notoriamente, la relazione di reciprocità connessa al carattere lineare omogeneo del problema: la così detta impedenza di trasferta del quadripolo - cioè il rapporto della tensione fra due morsetti, lasciati a circuito aperto, con la corrente che passa fra gli altri due - resta invariata scambiando l'ingresso con l'uscita.

La deduzione della (7) dalle soluzioni (6) è immediata: basta eguagliare il rapporto $\frac{V(0)}{I(x)}$ per $I(0) = 0$ al rapporto $\frac{V(x)}{I(0)}$ per $I(x) = 0$.

5. Pur nella loro potenza di sintesi, le relazioni (6) e (8) trovano raramente impiego diretto. Nella grande maggioranza dei problemi della fisica matematica le condizioni supplementari non sono date dalla coppia tensione-corrente all'ingresso o all'uscita: invece, sono noti i vincoli elettrici ai terminali ed è data la sorgente che agisce su uno di essi.

Questo secondo problema corrisponde allo schema della fig. 2. All'ingresso della linea agisce, attraverso il vincolo elettrico costituito da un certo bipolo, la sorgente di tensione $v_o(t)$ (né il corso del ragionamento e la sostanza dei risultati cambierebbero se l'eccitazione fosse in corrente invece che in tensione). Il vincolo elettrico all'altro estremo è costituito dal bipolo inserito fra i terminali d'uscita. L'unica ipotesi restrittiva su entrambi i bipoli d'estremità è che essi siano costituiti da circuiti lineari e invariabili nel tempo.

Per stare dentro le ipotesi fatte, si ammette che all'atto dell'inserzione della sorgente, nell'istante $t = 0$, tutto si trovi in riposo.

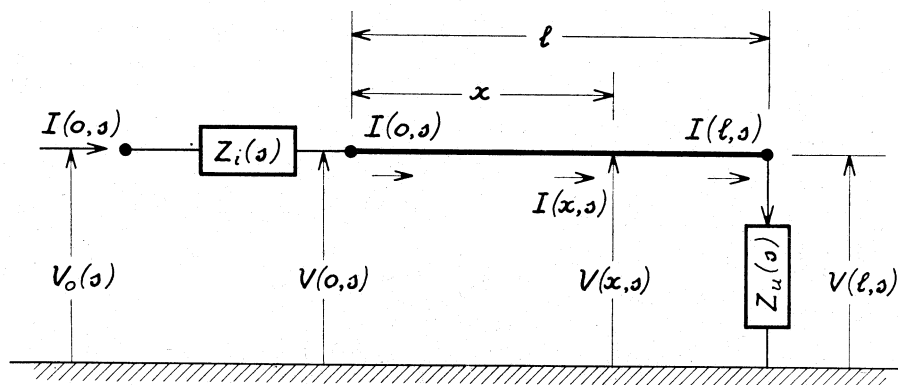


Fig. 2.

Assunta esistente la trasformata

$$V_o(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v_o(t) dt$$

dell'eccitazione $v_o(t)$, le condizioni ai limiti da associare al sistema differenziale (3) sono date dalle relazioni

$$(9) \quad \begin{cases} V(0) + Z_i I(0) = V_o \\ V(l) - Z_u I(l) = 0, \end{cases}$$

dove figurano l'impedenza Z_i all'ingresso e l'impedenza di carico Z_u , entrambe funzioni di s ; tali impedenze d'estremità traducono nel dominio immagine le equazioni differenziali dei rispettivi circuiti.

Le soluzioni del problema così delineato hanno la forma

$$(10) \quad \begin{cases} V(x) = G(x) V_o \\ I(x) = Y(x) V_o = \frac{1}{Z(x)} V_o \end{cases}$$

che mette in evidenza le due funzioni fondamentali del dominio immagine: la funzione di trasferta G e l'impedenza di trasferta Z . L'associazione dell'integrale generale (6) con le condizioni ai limiti (9) fornisce queste due funzioni attraverso una catena, ovvia e priva d'interesse, di operazioni algebriche:

$$(11) \quad \begin{cases} G(x) = \frac{\{Z_u M(l) + N(l)\} Q(x) - \{Z_u P(l) + Q(l)\} N(x)}{Z_u M(l) + N(l) + Z_i Z_u P(l) + Z_i Q(l)} \\ Y(x) = \frac{\{Z_u P(l) + Q(l)\} M(x) - \{Z_u M(l) + N(l)\} P(x)}{Z_u M(l) + N(l) + Z_i Z_u P(l) + Z_i Q(l)} \end{cases}$$

Se le impedenze Z_i e Z_u sono razionali fratte (come succede quando i circuiti d'estremità sono discreti) le (11) sono l'esito di operazioni razionali su funzioni intere; sono, quindi, delle funzioni meromorfe. In forza di ciò, il risultato si conserva anche quando i circuiti di estremità sono continui e finiti.

Due casi particolari, importanti anche in sè, sottolineano il significato dei parametri generali della linea. Il primo è l'eccitazione in tensione senza bipolo all'ingresso ($Z_i = 0$) con l'uscita a circuito aperto ($Z_u = \infty$):

$$\begin{cases} G_a(x) = \frac{M(l) Q(x) - P(l) N(x)}{M(l)} \\ Y_a(x) = \frac{P(l) M(x) - M(l) P(x)}{M(l)} \end{cases}$$

Il secondo corrisponde alle stesse condizioni d'ingresso, ma ha l'uscita in corto circuito ($Z_i = Z_u = 0$):

$$\begin{aligned} G_c(x) &= \frac{N(l) Q(x) - Q(l) N(x)}{N(l)} \\ Y_c(x) &= \frac{Q(l) M(x) - N(l) P(x)}{N(l)} \end{aligned}$$

6. Il tipo più elementare di mezzo di propagazione, quello della linea uniforme, si presta bene per illustrare i risultati.

Assunti i parametri della linea come costanti, si fanno, conforme all'uso, le posizioni

$$(12) \quad \begin{cases} \gamma = \sqrt{(\mathfrak{L}s + \mathfrak{R})(\mathfrak{C}s + \mathfrak{G})} \\ Z_o = \frac{\gamma}{\mathfrak{C}s + \mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mathfrak{L}s + \mathfrak{R}}{\mathfrak{C}s + \mathfrak{G}}} \end{cases}$$

che definiscono, rispettivamente, la funzione di propagazione γ e l'impedenza caratteristica Z_o della linea. Entrambe le funzioni (12) sono irrazionali quadratiche; è essenziale, per i presenti interessi, il fatto che esse possiedono gli stessi punti di diramazione (che sono in numero di due e giacciono sull'asse reale alle ascisse $-\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{L}}$ e $-\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}}$). Ciò posto, i parametri generali della linea contenuti nelle soluzioni (6) si scrivono, notoriamente,

$$(13) \quad \begin{cases} M(x, s) = \cosh \gamma x & N(x, s) = Z_o \sinh \gamma x \\ P(x, s) = \frac{1}{Z_o} \sinh \gamma x & Q(x, s) = \cosh \gamma x \end{cases}$$

Si vede chiaro che questi parametri sono funzioni intere di s . Si vede anche come gli irrazionali quadratici (12) si combinano per generale funzioni monodrome: M e Q sono funzioni pari; N e P sono date dal prodotto fra due funzioni a due rami aventi gli stessi punti di diramazione ⁽³⁾.

7. Se una linea estesa oltre l si pensa tagliata in l , il tronco che prosegue, munito della sua impedenza di carico, è visto dalla sezione di taglio come determinante di un vincolo fra tensione e corrente; è visto, cioè, come una virtuale impedenza inserita in l . Per quanto si è visto, questa impedenza è una funzione meromorfa di s (se è tale l'impedenza di uscita) comunque lungo sia il tronco asportato. Però, se la linea oltre l si estende all'infinito la proprietà cade. È vero che un sistema fisico esteso all'infinito non esiste se non in via d'astrazione; ma l'astrazione ha un grande significato, e conviene inquadrarla.

Anche una linea infinitamente lunga corrisponde, per ogni $x \leq l$, a una speciale impedenza inserita in l ; è quella che si chiama l'impedenza caratteristica Z_0 del mezzo (la quale, in generale, risulta funzione sia di s che di l se il mezzo non è uniforme). Se la linea è uniforme l'impedenza caratteristica Z_0 ha la espressione (12). Lasciando da parte, per ora, il problema di individuare il carattere di Z_0 , basta l'esempio delle (12) per mostrare che Z_0 è, in generale, una funzione di s a più valori. Ciò rende tali anche le funzioni G e Y ; però, nei riguardi del tronco $(0, l)$ un tale intervento di funzioni polidrome è provocato dal carattere speciale dell'impedenza di carico Z_0 e non dalla linea come tale.

(3) La constatazione che i parametri generali (13) della linea uniforme sono funzioni intere di s non è nuova. Essa è stata fatta da *L. Amerio*; vedi in proposito: *L. AMERIO, Tensioni e correnti in una catena di trasduttori quadripolari. Applicazione alla linea pupinizzata non dissipativa*, « Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes », vol. IV, 83-145 (1940).