
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ENRICO BOMPIANI

Su certe coppie di curve iperspaziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.5, p. 193–197.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_5_193_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 novembre 1963

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Geometria differenziale. — *Su certe coppie di curve iperspaziali.*
Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. Mi sono occupato in passato ⁽¹⁾ del comportamento della sviluppabile circoscritta ad una curva C di uno spazio proiettivo P_3 con il cono che da un punto regolare di C proietta la C stessa (dimostrando che sviluppabile e cono hanno lungo la generatrice comune invariante di contatto $3/4$).

G. Saban ha esteso il teorema ad una curva iperspaziale ⁽²⁾. In un lavoro più recente ⁽³⁾ egli ha poi estesa la ricerca ad una curva iperspaziale C (in uno spazio euclideo E_n) considerando insieme a C la rigata sviluppabile involuppo degli iperpiani che in ciascun punto di C sono ortogonali alla $(n - 2)$ -esima normale principale. Se lo spigolo di regresso è Γ , detta sviluppabile e il cono proiettante C da un punto regolare di Γ sono tagliati da un iperpiano che contenga lo spazio osculatore d'ordine j (ma non quello d'ordine $j + 1$) nel punto di C corrispondente a quello fissato su Γ in due curve aventi fra loro un contatto d'ordine $j + 2$ (nel punto fissato di C) mentre hanno contatto d'ordine j con la C stessa.

(*) Presentata nella seduta del 9 novembre 1963.

(1) E. BOMPIANI, *Sulle curve sghembe*, « Scritti matematici offerti a L. Berzolari », Pavia 1936, pp. 515-552.

(2) G. SABAN, *Sulle curve sghembe in uno S_n* , « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni » (5), 9, 309-321 (1950).

(3) G. SABAN, *Sulle curve sghembe*, « Ann. di Mat. » (4), 60, 111-133 (1962).

La natura proiettiva del risultato fra prevedere ch'esso si estenda ad una coppia di curve Γ, C di un qualsiasi spazio proiettivo P_n tali che C appartenga alla (prima) sviluppabile (delle tangenti) a Γ . Ciò è di fatto (e lo si vede con dimostrazione più semplice che nel caso euclideo); ma di più il teorema si estende al caso in cui C appartenga alla seconda (ma non alla prima) sviluppabile di Γ (quella dei suoi piani osculatori) o alle sviluppabili successive.

2. Sia Γ una curva dello spazio proiettivo P_n e sia O un suo punto regolare (cioè tale che ogni spazio osculatore $\neq P_n$ abbia con Γ contatto d'ordine esattamente uguale alla sua dimensione). Si scelga il simpleso di riferimento (vertici O_i) in modo che $O \equiv O_0$, la tangente in O sia la retta $O_0 O_1$, il piano osculatore sia $O_0 O_1 O_2$ e così di seguito. Se Γ è descritta dal punto $y(t)$ e si ha O_0 per $t = 0$, l' E^n di Γ di centro O_0 si può rappresentare con

$$y_0 = 1, \quad y_1 = t, \quad y_2 = a_{2,2} t^2 + \dots + a_{2,n} t^n + [n+1], \quad y_n = a_{n,n} t^n + [n+1]$$

con le $a_{i,t} \neq 0$.

La sviluppabile circoscritta a Γ sia descritta dal punto

$$x(\lambda, t) = y'(t) + \lambda y(t)$$

(λ, t parametri); una curva C su di essa è rappresentata dando $\lambda = \lambda(t)$ ed è posta in corrispondenza a Γ dal parametro t .

Fissata C non passante per O si può prendere il punto di C per $t = 0$ come punto O_1 del riferimento (non ancora fissato), la tangente ivi a C (nel piano $O_0 O_1 O_2$) come retta $O_1 O_2$ cioè $x_0 = x_3 = \dots = x_n = 0$, il piano osculatore Ω_2 (a C in $t = 0$) come $O_1 O_2 O_3$ cioè $x_0 = x_4 = \dots = x_n = 0$, lo spazio osculatore Ω_j come $x_0 = x_{j+2} = \dots = x_n = 0$ ($0 \leq j \leq n-2$), e l'iperpiano osculatore Ω_{n-1} come $x_0 = 0$.

Con questa scelta, poiché $x_0 = \lambda(t)$ e tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima inclusa sono nulle per $t = 0$ dev'essere $\lambda(t)$ divisibile per t^n .

L'elemento differenziale E^n di Γ di centro O individua perciò (in relazione alla scelta fatta) un E^{n-1} di C

$$x_0 = [n], \quad x_1 = 1 + [n], \quad x_2 = y'_2 + [n], \dots, x_n = y'_n + [n].$$

Le equazioni parametriche della sviluppabile nell'intorno di $t = 0$ (precisamente del suo elemento $\mathbb{E}^{n-1}$ relativo a questa generatrice) sono

$$x_0 = \lambda, \quad x_1 = 1 + \lambda t, \quad x_2 = y'_2 + \lambda y_2 + [n], \dots, x_n = y'_n + \lambda y_n + [n]$$

ove $y_2, \dots, y_n$ sono relative all' E^n di Γ ; quelle del cono proiettante C da O_0 sono

$$x_0 = h + [n], \quad x_1 = 1 + [n], \quad x_2 = y'_2 + [n], \dots, x_n = y'_n + [n].$$

Si consideri ora un iperpiano contenente Ω_j ma non contenente Ω_{j+1} ; la sua equazione è del tipo

$$x_0 = \rho_{j+2} x_{j+2} + \dots + \rho_n x_n, \quad \rho_{j+2} \neq 0.$$

La sua sezione con la sviluppabile si ha quindi per

$$\lambda = \rho_{j+2}(y'_{j+2} + \lambda y_{j+2}) + \dots + \rho_n(y'_n + \lambda y_n) + [n];$$

il termine di λ di grado più basso è t^{j+1} moltiplicato per un coefficiente $\neq 0$ (essendo $\rho_{j+2} \neq 0$ e $a_{j+2, j+2} \neq 0$).

La sezione dello stesso iperpiano col cono si ha per

$$h = \rho_{j+2} y'_{j+2} + \dots + \rho_n y'_n + [n].$$

Su questa sezione C_c del cono si ha quindi (con questa espressione di h)

$$\overset{c}{x}_0 = h + [n] \quad , \quad \overset{c}{x}_1 = 1 \quad , \quad \overset{c}{x}_2 = y'_2 + [n], \dots, \overset{c}{x}_n = y'_n + [n].$$

Sulla sezione C_s della sviluppabile dividendo le coordinate per $1 + \lambda t$ in modo da poterle confrontare con le precedenti si ha

$$\overset{s}{x}_0 = \frac{\lambda}{1 + \lambda t} \quad , \quad \overset{s}{x}_1 = 1 \quad , \quad \overset{s}{x}_2 = \frac{y'_2 + \lambda y_2 + [n]}{1 + \lambda t}, \dots, \overset{s}{x}_n = \frac{y'_n + \lambda y_n + [n]}{1 + \lambda t}$$

(con l'espressione di λ calcolata sopra).

La differenza

$$\overset{s}{x}_2 - \overset{c}{x}_2 = \lambda(y_2 - ty'_2) + \dots$$

è dell'ordine $j + 3$ in t , mentre le altre differenze sono tutte di ordine più elevato; cioè gli sviluppi delle coordinate di $\overset{s}{x}$, $\overset{c}{x}$ coincidono fino ai termini d'ordine $j + 2$ inclusi o anche le curve C_s e C_c hanno contatto esattamente d'ordine $j + 2$.

L'analogo confronto fra le coordinate di C_c e di C porta che la differenza $\overset{c}{x}_0 - x_0 = h + [n]$ è dell'ordine di t^{j+1} , e le analoghe differenze per le altre coordinate sono dell'ordine di t^n ; cioè C_c (e così C_s) ha con C contatto d'ordine j (esattamente) in O_1 .

Si ha quindi:

Data nello spazio proiettivo P_n una curva C si consideri una sviluppabile per essa il cui spigolo di regresso sia $\Gamma \neq C$. Si seghino questa sviluppabile e il cono proiettante C da un punto regolare di Γ con un iperpiano contenente lo spazio osculatore Ω_j (ma non Ω_{j+1}) a C nel punto corrispondente al punto scelto su Γ : queste due curve hanno fra loro un contatto d'ordine $j + 2$ (esattamente) ed hanno con C contatto d'ordine j .

3. Poniamoci ora una questione analoga. Sia data una curva Γ e inoltre una curva C i cui punti appartengano (non più alle tangenti, ma) ai piani osculatori a Γ in modo che ogni piano osculatore a Γ contenga un punto di C ; quindi è determinata una corrispondenza fra i punti di C e di Γ .

Fissato un punto regolare di Γ vogliamo esaminare il comportamento della intersezione della sviluppabile V_3 dei piani osculatori a Γ e del cono (pure a tre dimensioni) proiettanti C dalla tangente a Γ nel punto fissato nell'intorno del piano osculatore in questo punto (piano comune a V_3 e al cono).

Sia Γ descritta dal punto $y(t)$; preso il punto di Γ come O_0 del riferimento si adotti per l' E^n di Γ con centro in O_0 la rappresentazione di prima
 $y_0 = 1$, $y_1 = t$, $y_2 = a_{2,2}t^2 + \dots + [n+1]$, $\dots$, $y_n = a_{n,n}t^n + [n+1]$,
 con tutte le $a_{i,i} \neq 0$.

Per un punto della V_3 sviluppabile di piani si ha

$$x(\lambda, \mu, t) = y''(t) + \mu y'(t) + \lambda y(t)$$

(parametri λ, μ, t); una curva C il cui punto $x(t)$ appartenga al piano osculatore in $y(t)$ a Γ (ma non alla tangente ivi) è determinata dando $\lambda = \lambda(t)$ e $\mu = \mu(t)$.

Poiché il riferimento non è che parzialmente determinato possiamo scegliere il punto di C per $t=0$ come punto O_2 , la tangente come retta $O_2 O_3$ e così di seguito per gli spazi osculatori Ω_j in O_2 : sicché per $t=0$ e su C si ha il punto: $x_0 = x_1 = 0$, $x_3 = \dots = x_n = 0$, la tangente: $x_0 = x_1 = 0$, $x_4 = \dots = x_n = 0$, lo spazio Ω_j : $x_0 = x_1 = 0$, $x_{j+3} = \dots = x_n = 0$ e finalmente Ω_{n-2} : $x_0 = x_1 = 0$.

Con questa scelta (ancora parziale) del riferimento poiché $x_0 = \lambda(t)$, $x_1 = \mu(t) + t\lambda(t)$ e le derivate di x_0, x_1 rispetto a t sono nulle fino all'ordine $n-2$ incluso per $t=0$ si ha

$$\lambda(t) = t^{n-1} \bar{\lambda}(t) \quad , \quad \mu(t) = t^{n-1} \bar{\mu}(t)$$

e perciò in relazione all' E^n di Γ è determinato un E^{n-2} di C

$$x_0 = [n-1] \quad , \quad x_1 = [n-1] \quad , \quad x_2 = y''_2 + [n-1] \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = y''_n + [n-1] \quad .$$

Il cono proiettante dalla tangente in O_0 a Γ è rappresentato da

$$x_0 = h + [n-1] \quad , \quad x_1 = k + [n-1] \quad , \quad x_2 = y''_2 + [n-1] \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = y''_n + [n-1]$$

(parametri h, k, t).

Con una parziale scelta del punto unità si può sempre fare $a_{2,2} = 1/2$ in modo che $y''_2 = 1 + \dots$

Si consideri ora uno spazio P_{n-2} contenente Ω_j ma non contenente Ω_{j+1}

$$x_0 = \rho_{j+3} x_{j+3} + \dots + \rho_n x_n$$

$$x_1 = \sigma_{j+3} x_{j+3} + \dots + \sigma_{j+3} x_n, \quad \sigma_{j+3} \neq 0$$

e si determinino le sue sezioni: C_s con la sua sviluppabile V_3 , e C_e col cono.

Per C_s dovrà essere

$$\lambda = \rho_{j+3} (y''_{j+3} + \mu y'_{j+3} + \lambda y_{j+3}) + \dots + \sigma_n (y''_n + \mu y'_n + \lambda y_n) + [n-1]$$

$$\mu = \sigma_{j+3} (y''_{j+3} + \mu y'_{j+3} + \lambda y_{j+3}) + \dots + \sigma_n (y''_n + \mu y'_n + \lambda y_n) + [n-1]$$

su C_s ; λ e μ cominciano ciascuno con un termine in t^{j+1} quindi su C_s

$$\overset{s}{x}_0 = \lambda(t) + [n-1] \quad , \quad \overset{s}{x}_1 = \mu(t) + [n-1] \quad , \quad \overset{s}{x}_2 = y''_2 + \mu y'_2 + \lambda y_2 + [n-1]$$

$$\overset{s}{x}_3 = y''_3 + \mu y'_3 + \lambda y_3 + [n-1] \quad , \quad \dots \quad , \quad \overset{s}{x}_n = y''_n + \mu y'_n + \lambda y_n + [n-1] \quad .$$

Invece sulla C_c deve aversi

$$h(t) = \rho_{j+3} y''_{j+3} + \dots + \rho_n y''_n + [n-1]$$

$$k(t) = \sigma_{j+3} y''_{j+3} + \dots + \sigma_n y''_n + [n-1]$$

e

$$\overset{c}{x}_0 = h(t) + [n-1] \quad , \quad \overset{c}{x}_1 = k(t) + [n-1] \quad , \quad \overset{c}{x}_2 = y''_2 + [n-1]$$

$$\overset{c}{x}_3 = y''_3 + [n-1], \dots, \overset{c}{x}_n = y''_n + [n-1].$$

Per poter confrontare le due curve C_s e C_c bisogna normalizzare le coordinate $\overset{s}{x}_i$ e $\overset{c}{x}_i$ in modo che le coordinate non nulle in O_2 , cioè $\overset{s}{x}_2$ e $\overset{c}{x}_2$, siano uguali per esempio ad 1; ciò vuol dire dividere le $\overset{s}{x}_i$ per $y''_2 + \mu y'_2 + \lambda y_2 + [n-1]$ e le $\overset{c}{x}_i$ per $y''_2 + [n-1]$. Ora è

$$\frac{1}{y''_2 + \mu y'_2 + \lambda y_2} = \frac{1}{y''_2} - \mu y'_2 + \dots$$

ove si è messo in evidenza il termine d'ordine più basso $\mu y'_2$ per cui differiscono i due fattori di normalizzazione; il termine d'ordine più basso in t è d'ordine $j+2$.

Una semplice ispezione mostra che le coordinate $\overset{s}{x}_3, \overset{c}{x}_3$ (a normalizzazione fatta) cominciano a differire per un termine in t^{j+3} (poiché y''_2 comincia con un termine in t), mentre le altre coordinate differiscono per termini d'ordine più elevato).

Ciò prova che C_s e C_c hanno in comune (esattamente) un E^{j+2} (o hanno contatto d'ordine $j+2$).

Il fatto che h, k comincino con un termine in t^{j+1} prova che C_s e C_c hanno contatto d'ordine j con C .

Si ha quindi il teorema:

Dato in P_n un arco di curva Γ (di classe di differenziabilità almeno $\mathcal{C}^n$) e un arco di curva C (di classe almeno $\mathcal{C}^{n-2}$) tale che ogni punto di C appartenga ad un piano osculatore a Γ , si consideri un punto regolare di Γ e il corrispondente su C .

La V_3 dei piani osculatori a Γ e il cono proiettante dalla tangente nel punto fissato di Γ la curva C sono tagliate da un P_{n-2} che contenga lo spazio Ω_j a C nel punto fissato (ma P_{n-2} non contenente Ω_{j+1}) in due curve C_s, C_c che hanno fra loro un contatto d'ordine $j+2$ e con C un contatto d'ordine j nel punto di C .

Lo stesso procedimento porta ad un risultato del tutto analogo per due curve Γ, C tali che i punti di C appartengano agli spazi osculatori di dimensione s di Γ , cioè alla s -esima sviluppabile circoscritta a Γ . Bisognerà considerare questa sviluppabile V_{s+1} e il cono proiettante C da uno spazio P_{s-1} osculatore a Γ (in un punto regolare) e segare queste due varietà con uno spazio P_{n-s} contenente lo spazio osculatore Ω_j ($j \leq n-s$) ma non Ω_{j+1} a C nel punto corrispondente a quello scelto su Γ .