Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

József Molnár

# Estensione del teorema di Segre-Mahler allo spazio

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **35** (1963), n.3-4, p. 166–168.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_3-4_166_0>

**Geometria.** — *Estensione del teorema di Segre–Mahler allo spazio.* Nota [(*)] di József Molnár, presentata dal Socio B. Segre.

Chiamiamo un poliedro dello spazio di curvatura costante [(1)] ad $n$ dimensioni *poliedro Segre–Mahler*, brevemente poliedro SM, se l'angolo di due suoi iperpiani arbitrari, passanti per lo stesso vertice, è sempre $\leqq \frac{2\pi}{3}$.

Nella geometria discreta è noto il seguente teorema di Segre–Mahler [19]:

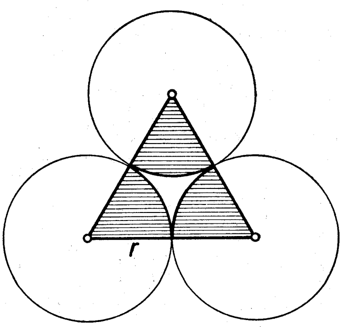


Fig. 1.

*Se in un poligono* SM *del piano euclideo sono comunque collocati cerchi disgiunti* [(2)] *e congruenti, allora la densità dei cerchi rispetto al poligono è sempre* $\leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\cdots$ [(3)].

Sia $d_n(r)$, nello spazio di curvatura costante ad $n$ dimensioni, la densità delle $n+1$ sfere fra loro a due a due tangenti di raggio $r$, rispetto al simplesso regolare determinato dai centri di queste sfere (fig. 1, $n = 2$).

Fra le varie generalizzazioni ed estensioni del teorema di Segre–Mahler finora fatte (Fejes Tóth [4], [5], [6], [7], Groemer [11], Hadwiger [12], Molnár [13], [14], [15], [16]), segnaliamo la seguente [(4)]:

Se in un poligono SM di una superficie di curvatura costante sono comunque collocati cerchi disgiunti e congruenti di raggio $r$, allora la densità dei cerchi rispetto al poligono è sempre $\leqq d_2(r)$ [(5)].

Nel presente lavoro sarà esteso questo teorema allo spazio; più precisamente, dimostreremo il

Teorema: *Se in un poliedro* SM *dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante sono comunque collocate sfere disgiunte e congruenti di raggio $r$, allora la densità delle sfere rispetto al poliedro è sempre* $\leqq d_3(r)$ [(6)].

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1963.

(1) Ossia di uno spazio euclideo, di uno spazio sferico o di uno spazio iperbolico.

(2) Più precisamente, si suppone che i cerchi non abbiano punti interni comuni.

(3) Intendiamo per densità dei cerchi $\{C_i\}$ rispetto al dominio D, il quoziente fra la somma delle aree $C_i \cap D$ e l'area del dominio, cioè $\frac{\Sigma C_i \cap D}{D}$ (ved. per esempio Fejes Tóth [7] p. 73), ove per un dominio e per la sua misura usiamo lo stesso simbolo. In modo analogo si definisce la densità di un insieme di sfere collocate in un dominio.

(4) Molnár [14].

(5) Nel piano euclideo $d_2(r) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\cdots$.

(6) Nello spazio euclideo $d_3(r) = \sqrt{18}\left(\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}7797\cdots$. Questo è il migliore estremo superiore finora noto per la densità delle sfere disgiunte di raggio $r$ collocate nello spazio (Rogers [18]). Il giovane matematico K. Böröczky (Böröczky–Florian [1]) ha di-

DIMOSTRAZIONE (7). – Sia S il poliedro SM e siano $\{S_i\}$ le sfere collocate nel poliedro. Indichiamo con $D_i$ il luogo dei punti le cui distanze dal centro della sfera $S_i$ siano non maggiori delle distanze dai centri delle altre sfere. Si vede facilmente che la cella $D_i$ (cella Dirichlet, poliedro Voronoi (8)) corrispondente alla sfera $S_i$ è un poliedro convesso. I poliedri $\{D_i\}$ associati alle sfere $\{S_i\}$ ricoprono interamente e semplicemente il poliedro S, ad eccezione delle frontiere dei poliedri $\{D_i\}$.

Per dimostrare il nostro teorema basta far vedere che, nel caso di una qualsiasi cella $D_i$, abbiamo $\frac{S_i}{D_i} \leqq d_3(r)$.

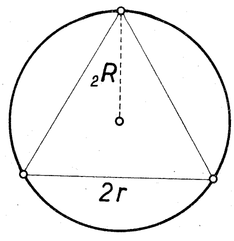

Fig. 2.

Indichiamo con ${}_nR$ il raggio della sfera circoscritta al simplesso regolare di dimensione $n$ e di spigolo $2r$ (fig. 2).

Considerando la limitazione ammessa per l'angolo di faccia del poliedro S, si vede facilmente che il poliedro convesso $D_i$, contenente la sfera $S_i$ di raggio $r$, ha ancora le proprietà seguenti: le distanze dei suoi spigoli dal centro $O_i$ della sfera $S_i$ non sono minore di ${}_2R$ e le distanze dei suoi vertici da $O_i$ non sono minore di ${}_3R$ (9). Per i poliedri $D_i$ di questo genere, è stato dimostrato recentemente dal Böröczky che $\frac{S_i}{D_i} \leqq d_3(r)$ (10). Con ciò il teorema enunciato rimane stabilito.

A. Florian (11) ha dimostrato, poco tempo fa, che

$$d_3(r) \leqq \lim_{r \to \infty} d_3(r) = \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \cdots\right)^{-1} = 0{,}853\cdots \text{ (12)}.$$

Usando questo risultato del Florian, dal nostro teorema segue il

COROLLARIO: *Se in un poliedro* SM *dello spazio a tre dimensioni di cur-*

mostrato, poco tempo fa, la congettura di FEJES TÓTH [10], secondo la quale $d_3(r)$ dà l'estremo superiore per la densità anche nello spazio sferico e nello spazio iperbolico.

L'estremo superiore del nostro teorema è preciso, per esempio nel caso in cui il poliedro SM è una cella del mosaico regolare sferico $\{5, 3, 3\}$ e $\{S_i\}$ si compone soltanto della sfera inscritta a questa cella.

(7) Il ragionamento della dimostrazione di questo teorema è perfettamente analogo a quello del teorema testè citato (MOLNÁR [14]).

(8) Ved. COXETER [2].

(9) Se $D_i$ non ha una faccia comune con il poliedro S, l'affermazione è ovvia. Se invece $D_i$ ha almeno una faccia comune con S, allora l'affermazione segue immediatamente specchiando $S_i$ sulle corrispondenti facce comuni (cfr. MOLNÁR [14]).

(10) Böröczky nel suo ragionamento si limita ad un poliedro inscritto sulla sfera di raggio ${}_3R$ concentrica con $S_i$ (cfr. FEJES TÓTH [7]) e considera la densità della sfera $S_i$ in una piramide il cui vertice coincide con il centro della sfera $S_i$ e la base della piramide e una faccia del poliedro (cfr. MOLNÁR [8]). La dimostrazione della inuguaglianza $\frac{S_i}{D_i} \leqq d_3(r)$ si fonda sul concetto d'un limite della densità (BÖRÖCZKY–FLORIAN [1]).

(11) BÖRÖCZKY–FLORIAN [1].

(12) Ci sembra verosimile che $0{,}853\cdots$ sia pure la densità della più densa collocazione di orosfere disgiunte (COXETER [3], FEJES TÓTH [9], [10]).

*vatura costante sono comunque collocate sfere disgiunte e congruenti di raggio $r$, allora la densità delle sfere è sempre* $< 0{,}853 \cdots$.

Osserviamo che si possono ottenere, con ragionamenti analoghi, estremi superiori anche nei casi seguenti: 1° i raggi delle sfere sono noti, 2° i raggi sono in un intervallo assegnato, 3° le lunghezze dei raggi assumono $n$ valori diversi.

Menzioniamo infine che ci sembra verosimile la seguente:

CONGETTURA. – Se in un poliedro SM dello spazio di curvatura costante ad $n$ dimensioni sono comunque collocate sfere disgiunte e congruenti di raggio $r$, la densità delle sfere rispetto al poliedro non supera mai $d_n(r)$.

## BIBLIOGRAFIA.

[1] K. BÖRÖCZKY–A. FLORIAN, *Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum*, «Acta Math. Acad. Sci. Hung.» (in corso di stampa).

[2] H. S. M. COXETER, *Introduction to Geometry*, New York – London, 1961.

[3] — *Arrangement of equal spheres in non–euclidean spaces*, «Acta. Math. Acad. Sci. Hung.», *5*, 263–274 (1954).

[4] L. FEJES TÓTH, *Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung*, «Comment. Math. Helvetici», *23*, 342–349 (1949).

[5] — *Some packing and covering theorems*, «Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.», *12/A* 62–67 (1950).

[6] — *Ausfüllung eines konvexen Bereiches durch Kreise*, «Publ. Math. Debrecen», *1*, 92–94 (1949).

[7] — *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953.

[8] — *Collocazioni nel piano, nella sfera e nello spazio* (in russo), Mosca 1958.

[9] — *On close–packings of spheres in spaces of costant curvature*, «Publ. Math. Debrecen», *3*, 158–167 (1953).

[10] — *Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung*, «Archiv Math.», *10*, 307–313 (1959).

[11] H. GROEMER, *Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich*, «Math. Zeitschrift», *73*, 285–294 (1960).

[12] H. HADWIGER, *Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten*, «Math. Zeitschrift», *49*, 305–309 (1944).

[13] J. MOLNÁR, *Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise*, «Publ. Math. Debrecen», *2*, 266–275 (1952).

[14] — *Alcune generalizzazioni del teorema di Segre–Mahler*, «Accad. Naz. dei Lincei», *30/5*, 700–705 (1961).

[15] — *Körelhelyezések állandó gorbületü felületeken*, «Magyar Tud. Akad. Oszt. Közl.», *12*, 224–263 (1962).

[16] — *Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung*, «Math. Annalen» (in corso di stampa).

[17] — *Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante*, «Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX», *1*, 61–72, (1962).

[18] C. A. ROGERS, *The packing of equal spheres*, «Proc. London Math. Soc.», *8*, 609–620 (1958).

[19] B. SEGRE–K. MAHLER, *On the densest packing of circles*, «Amer. Math. Monthly», *51*, 261–270 (1944).