
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SAMUEL ZAIDMAN

Quasi-periodicità per una equazione operazionale del primo ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.3-4, p. 152-157.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_3-4_152_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Quasi-periodicità per una equazione operazionale del primo ordine* (*). Nota (**) di SAMUEL ZAIDMAN, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

1. In questa Nota si estende un teorema di quasi-periodicità per l'equazione del calore non-omogenea dimostrato in un precedente lavoro [6].

Seguiamo ora l'impostazione astratta per equazioni paraboliche dovuta a Lions [4].

Siano quindi dati due spazi di Hilbert separabili, V e H ; $V \subset H$ con immersione algebrica e continua, e in più, V è denso in H . Si chiama $|u|$ la norma in H e $\|v\|$ la norma in V .

Si dà inoltre una forma sesquilineare continua su V , $a(u, v)$ che sia simmetrica:

$$a(u, v) = \overline{a(v, u)}, \quad \forall u, v \in V$$

e « coerciva »

$$\exists \lambda, \alpha > 0, \text{ tali che } a(u, u) + \lambda |u|^2 \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in V.$$

La forma $a(u, v)$ definisce un operatore auto-aggiunto A , mediante la relazione

$$a(u, v) = (Au, v)_H, \quad \forall u \in D_A \text{ e } v \in H$$

$$(D_A = \{u \in V, \text{ tali che } \exists f \in H, \text{ con } a(u, v) = (f, v)_H, \forall v \in V\}.$$

Ricordiamo anche la definizione dello spazio $V^{1-\theta} H^0$, $0 \leq \theta \leq 1$ intermedio fra V e H . Se $((u, v))$ è il prodotto scalare in V , allora $((u, v))_V = (\wedge u, v)_H$, $\forall u \in D_\wedge$, ove $\wedge$ è un certo operatore auto-aggiunto e positivo, e si dimostra che $V = D_{\wedge^{1/2}}$ (quest'ultimo spazio con la norma del grafico).

Si pone poi, per definizione (Lions [5]):

$$V^{1-\theta} H^0 = D_{B^{1-\theta}}, \quad B = \wedge^{1/2} \text{ con la norma del grafico.}$$

Si ha $V \subset V^{1-\theta} H^0 \subset H$ algebricamente e topologicamente.

2. Abbiamo dimostrato [7] (e anche nel caso, più generale, in cui $a(t, u, v)$ dipenda da un parametro t), il seguente

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano; Gruppo di Ricerche n. 12 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1962-1963.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1963.

TEOREMA. — Sia data una funzione $f(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; H)$. Esiste, nelle ipotesi fatte precedentemente, una funzione $u(t)$ tale che

$$u(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; H) \quad , \quad \text{con } u'(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; H)$$

e

$$a(u(t), v) + (u'(t), v)_H = (f(t), v)_H \quad , \quad \forall v \in V,$$

quasi-ovunque in J (dove $u(t) \in D_A$ quasi-ovunque in J e $u'(t) + Au(t) = f(t)$ q.o.).

Ricordiamo che $J = (-\infty, +\infty)$.

Adesso osserviamo che $u(t)$ è continua da $t \in J$ in V (Lions [5]) ⁽¹⁾.

Il nostro risultato attuale è espresso nel seguente

TEOREMA 1. — Sia $f(t)$ una funzione quasi-periodica da $t \in J$ in H . Se una soluzione $u(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; V)$, con $u'(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; H)$, dell'equazione $u'(t) + Au(t) = f(t)$ risulta limitata in H ($|u(t)| \leq M, t \in J$), essa è quasi-periodica da $t \in J$ in $V^{1-\theta} H^0$, per $0 < \theta \leq 1$.

Osservazione. — 1° Si ritrova ⁽²⁾ il Teor. IV.1 di [6], qualora si prenda

$$V = H^1(\mathbb{R}^n), H = L^2(\mathbb{R}^n), a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx;$$

2° il teorema presenta interesse soltanto se nella ipotesi di « coercività »: $a(u, u) + \lambda |u|^2 \geq \alpha \|u\|^2$, non si può prendere $\lambda = 0$.

Dimostrazione del Teorema 1. — Come abbiamo visto nell'introduzione, l'operatore A generato dalla forma $a(u, v)$ è auto-aggiunto; esso è inoltre inferiormente limitato, in quanto, $\forall u \in D_A$, si ha

$$(Au, u) = a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 - \lambda |u|^2 \geq c\alpha |u|^2 - \lambda |u|^2 = \nu |u|^2$$

allora

$$(-Au, u) \leq -\nu |u|^2 \quad , \quad \forall u \in D_A,$$

e $-Au = \int_{-\infty}^{-\nu} \sigma dE_\sigma u$, ove E_σ è la famiglia spettrale di $-A$, normalizzata così

che sia $E_{\sigma-} = E_\sigma$.

Sia $E_{a,b} = E_a - E_b$; come noto, è

$$a(u, u) \leq (-AE_{a,b} u, u) \leq b(u, u) \quad , \quad \forall u \in H.$$

$$E_{a,b}(H) \subset D_A, \text{ se } -\infty < a < b \leq -\nu.$$

LEMMA 1. — Se $u(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; V)$, con $u'(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; H)$ soddisfa l'equazione $u'(t) + Au(t) = f(t)$, $\forall v \in V$, quasi-ovunque in $t \in J$

(1) Dato che $u(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; D_A)$, e $u'(t) \in L^2_{\text{loc}}(J; H)$, risulta da [5] che $u(t)$ è continua da $t \in J$ in $D_{(A+\lambda I)^{1/2}} = V$ (quest'ultima relazione risulta dalle ipotesi fatte all'inizio sulla forma $a(u, v)$).

(2) Leggermente migliorato.

allora, $\forall a, b, -\infty < a < b \leq -v$, la funzione $E_{a,b}u(t)$ è derivabile con continuità in H , e soddisfa l'equazione

$$\frac{d}{dt} E_{a,b}u(t) = -AE_{a,b}u(t) + E_{a,b}f(t), t \in J.$$

Difatti, la funzione $u(t)$ soddisfa per ipotesi alla seguente relazione integrale:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (u(t), \varphi'(t))_H dt + \int_{-\infty}^{\infty} (u(t), A\varphi(t))_H dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t), \varphi(t))_H dt$$

$\forall \varphi \in L^2_{loc}(J; H)$, $\varphi' \in L^2_{loc}(J; H)$, $A\varphi \in L^2_{loc}(J; H)$, φ con supporto compatto. Sia ora $v(t) \in C^1_0(J)$, e $v \in H$; la funzione $\varphi(t) = (E_{a,b}v)v(t) - \infty < a < b \leq -v$, soddisfa le condizioni richieste. Si ricava quindi:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} v'(t) (u(t), E_{a,b}v)_H dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(t) (u(t), AE_{a,b}v)_H dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), E_{a,b}v)_H v(t) dt.$$

Da qui, usando il fatto che $u(t) \in D_A$ quasi-ovunque, si ottiene

$$-\int_{-\infty}^{\infty} v'(t) (E_{a,b}u(t), v)_H dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(t) (AE_{a,b}u(t), v)_H dt = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{a,b}f(t), v)_H v(t) dt$$

oppure, dato che v è preso ad arbitrio in H ,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} v'(t) E_{a,b}u(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(t) AE_{a,b}u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{a,b}f(t)) v(t) dt.$$

Quindi, nel senso delle distribuzioni vettoriali a valori in H ,

$$\frac{d}{dt} E_{a,b}u(t) = AE_{a,b}u(t) + E_{a,b}f(t).$$

Poiché $AE_{a,b}u(t)$ è continua in H , come lo è $u(t)$, il lemma è dimostrato.

LEMMA 2. - Sia B un operatore auto-aggiunto limitato in H tale che

$$m_1(x, x) \leq (Bx, x) \leq m_2(x, x) \quad \forall x \in H \quad ; \quad m_1 < m_2 < 0.$$

Sia anche $g(t)$ una funzione quasi-periodica da $t \in J$ in H .

Se la funzione $v(t)$ limitata da $t \in J$ in H , è derivabile con continuità e soddisfa l'equazione

$$(*) \quad v'(t) = Bv(t) + g(t)$$

allora $v(t)$ è quasi-periodica da $t \in J$ in H , è data dalla formula

$$v(t) = \int_{-\infty}^t e^{B(t-\tau)} g(\tau) d\tau$$

e risulta $|v(t)|_H \leq \frac{1}{|m_2|} \sup_{t \in J} |g(t)|_H$.

La dimostrazione è facile (si moltiplica scalarmente in $(*)$ con $v(t)$ quando $g(t) \equiv 0$, e risulta il comportamento esponenziale delle auto-soluzioni, etc.).

Continuiamo adesso la dimostrazione del teorema. Prendiamo la seguente decomposizione dell'operatore $Ex = x$, $\forall x \in H$:

$$E = E_{(-\infty, -1)} + E_{(-1, 0)} + E_{(0, 0+)} + E_{(0+, -\infty)}.$$

Dimostreremo la quasi-periodicità in H delle funzioni

$$E_{(-\infty, -1)} u(t), \quad E_{(-1, 0)} u(t), \quad E_{(0, 0+)} u(t), \quad E_{(0+, -\infty)} u(t).$$

Si ha immediatamente

$$\frac{d}{dt} E_{(0, 0+)} u(t) = E_{(0, 0+)} f(t)$$

e si applica il teorema di Amerio [1].

Per $E_{(-1, 0)} u(t)$ e $E_{(0+, -\infty)} u(t)$ la dimostrazione è identica; la faremo qui per $E_{(-1, 0)} u(t)$.

Consideriamo a tale scopo l'ulteriore decomposizione

$$E_{(-1, 0)} = \sum_1^\infty E\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) = \sum_1^\infty F_n.$$

Risulta (per il lemma 1)

$$\frac{d}{dt} F_n u(t) = -AF_n F_n u + F_n f \quad (F_n^2 = F_n).$$

e applicando il lemma 2, $F_n u(t)$ è quasi-periodica in H .

Si ha

$$E_{(-1, 0)} u(t) = \sum_1^\infty F_n u(t), \quad \text{in } H \text{ forte } \forall t \in J.$$

Inoltre, la serie $\sum_1^\infty F_n f(t)$ converge verso $E_{(-1, 0)} f(t)$ in H forte, uniformemente in $t \in J$, dato che la traiettoria in H , per $t \in J$, della funzione quasi-periodica $E_{(-1, 0)} f(t)$, è relativamente compatta.

D'altra parte, anche la serie $\sum_1^\infty -AF_n F_n u$ converge uniformemente per $t \in J$ in H forte; dato che si ha

$$|AF_n F_n u| \leq \frac{1}{n} |F_n u| \leq \frac{1}{n} \text{Sup. } |u(t)| \leq \frac{M}{n}.$$

Osserviamo ancora che $AF_n F_n u$ sono quasi-periodiche.

Allora la serie $\frac{d}{dt} F_n u(t)$ converge uniformemente per $t \in J$ verso una funzione quasi-periodica; si ha quindi $\frac{d}{dt} E_{(-1, 0)} u(t) = \sum_1^\infty \frac{d}{dt} F_n u(t)$ e applicando il teorema di Amerio [1], risulta che $E_{(-1, 0)} u(t)$ è quasi-periodica in H . Ci resta da esaminare la quasi-periodicità della proiezione $E_{(-\infty, -1)} u(t)$.

Per questo, consideriamo la successiva decomposizione

$$E_{(-\infty, -1)} = \sum_1^{\infty} E_{(-n-1, -n)}.$$

Le funzioni $E_{(-n-1, -n)} u(t)$ sono quasi-periodiche per il lemma 5; di più: si hanno maggiorazioni della forma

$$|E_{(-n-1, -n)} u(t)| \leq \frac{1}{n} \sup_{t \in J} |f(t)|$$

il che basta per assicurare la convergenza uniforme della serie

$$\sum_1^{\infty} E_{(-n-1, -n)} u(t).$$

Abbiamo dimostrato così la quasi-periodicità in H della funzione $u(t)$. Per dimostrare la quasi-periodicità in $V^{1-\theta} H^0$ ⁽³⁾ bisogna fare alcune osservazioni supplementari.

LEMMA 3. - *Lo spazio $D_{(A+\lambda I)^{(1-\theta)/2}}$ con la norma del grafico è equivalente allo spazio $V^{1-\theta} H^0$ (le norme sono equivalenti).*

Per dimostrare il lemma basta osservare che lo spazio $D_{(A+\lambda I)^{1/2}}$ con la norma del grafico è equivalente con $V = D_{\wedge^{1/2}}$. Allora il risultato segue da una Nota disuguaglianza di Heinz (vedasi [2] oppure [3] per una estensione a operatori non auto-aggiunti).

Ora possiamo finire la dimostrazione della quasi-periodicità in $V^{1-\theta} H^0$, $0 < \theta \leq 1$.

Essa consta naturalmente nel far vedere che $(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} u(t)$ è quasi-periodica in H .

Consideriamo la decomposizione $u(t) = E_{(-\infty, -1)} u(t) + E_{(-1, -\infty)} u(t)$.

L'operatore $(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{(-1, -\infty)}$ è limitato in H , il che dimostra la quasi-periodicità di $(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{(-1, -\infty)} u(t)$ in H .

Per l'altro termine $(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{(-\infty, -1)} u(t)$ facciamo una ulteriore decomposizione:

$$E_{(-\infty, -1)} = \sum_1^{\infty} E_{(-n-1, -n)}.$$

Si ha che

$$(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{(-n-1, -n)} u(t) \text{ è quasi-periodica in } H, \forall n.$$

Ricordiamo anche la formula

$$E_{(-n-1, -n)} u(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A E_{(-n-1, -n)}(t-\tau)} E_{(-n-1, -n)} f(\tau) d\tau$$

(3) Con $0 < \theta \leq 1$.

(Lemma 2). Ne segue

$$\begin{aligned} & (A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{-(n+1),-n} u(t) = \\ & = \int_{-\infty}^t (A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} e^{AE_{-(n+1),-n}(t-\tau)} E_{-(n+1),-n} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Poiché risulta

$$\begin{aligned} & |(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} e^{-AE_{-(n+1),-n}(t-\tau)} E_{-(n+1),-n} f(\tau)| \leq \\ & \leq \sup_{\tau \in J} |f(\tau)| (n+1+\lambda)^{\frac{1-\theta}{2}} e^{-n(t-\tau)}, \end{aligned}$$

si ha poi

$$|(A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{-(n+1),-n} u(t)| \leq M \frac{(n+1+\lambda)^{(1-\theta)/2}}{n},$$

il che basta per assicurare la convergenza uniforme in H della serie

$$\sum_1^{\infty} (A + \lambda I)^{(1-\theta)/2} E_{-(n+1),-n} u(t).$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. AMERIO, *Sull'integrazione delle funzioni q.p. a valori in uno spazio hilbertiano*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », maggio 1960.
- [2] E. HEINZ, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, « Math. Ann. », 123, 415-438 (1951).
- [3] T. KATO, *A generalization of the Heinz Inequality*, « Proceedings Japan Academy », 37 305-308 (1961).
- [4] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles*, Springer-Verlag, 1961.
- [5] J. L. LIONS, *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, « Bull. Math. Soc. Sc. Mat. Phys. Roumanie », 50, 419-432 (1958).
- [6] S. ZAIDMAN, *Soluzioni limitate e quasi-periodiche dell'equazione del calore non-omogenea*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », dicembre 1961-gennaio 1962.
- [7] S. ZAIDMAN, *Un teorema di esistenza per un problema non « bene posto »*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », luglio (1963).