
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARLO FERRARI, JOSEPH H. CLARKE

**Flusso unidimensionale, non stazionario, e non in
equilibrio di un gas in presenza di un campo di
radiazioni ionizzanti. Equazioni generali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.1-2, p. 3-9.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_3_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_3_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1963 (Luglio-Agosto)

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione).

Gasdinamica. — *Flusso unidimensionale, non stazionario, e non in equilibrio di un gas in presenza di un campo di radiazioni ionizzanti. Equazioni generali* (*). Nota (**) di CARLO FERRARI e JOSEPH H. CLARKE, presentata dal Socio C. FERRARI.

INTRODUZIONE. — Nello studio della fotoionizzazione a monte di un'onda d'urto retta di sufficiente intensità, fatto in due Note precedenti [1], avevamo scritto le equazioni generali del moto unidimensionale, non stazionario e non in equilibrio di un gas in presenza di un campo di radiazioni, introducendo nell'equazione di trasporto dell'energia raggiante una approssimazione analoga a quella usata in problemi di astrofisica: essa consiste nel sostituire la dipendenza *continua* della *intensità specifica* di detta energia dalla direzione con una dipendenza *discontinua*, e porta, essenzialmente, a considerare una propagazione unidirezionale delle radiazioni.

Applichiamo ora una ipotesi e un metodo differenti, che hanno il vantaggio, sopra quelli usati nelle note succitate, di essere più coerenti con altre ipotesi e approssimazioni, che nel corso della trattazione erano state apportate, e di condurre a equazioni che sono meno influenzate dalla dipendenza

(*) Questo lavoro è stato fatto sotto il patrocinio essenzialmente dello « Advanced Research Projects Agency-Ballistic Missile Defense Office (Fluids Dynamics Branch dello "Office of Naval Research", U.S. Navy), ed in parte dello "Applied Physics Laboratory" della "Johns Hopkins University" (Contract N O W 62-0604-c col Bureau of Naval Weapons »).

(**) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1963.

direzionale della intensità specifica, mentre permettono di dare all'equazione di trasporto della energia raggiante, anche per frequenze delle radiazioni ν più elevate della *frequenza limite* ν_j (essendo questa definita dalla $\epsilon_j = h\nu_j$; dove h è la costante di *Planck* ed ϵ_j la energia di ionizzazione per molecola), ed anche in condizioni di *non-equilibrio termodinamico*, una espressione formalmente identica a quella sotto cui può essere posta in condizioni di equilibrio.

1. EQUAZIONI DEL FLUSSO. - Richiamiamo brevemente, per maggiore chiarezza, le equazioni generali ricavate in [1]. Noi consideriamo un gas monoatomico, parzialmente ionizzato: se α è il grado di ionizzazione, n_a , n_i , n_e rispettivamente i numeri di densità degli atomi, degli ioni e degli elettroni (numero di particelle per unità di volume) è

$$(1) \quad \alpha = \frac{n_i}{n_a + n_i} = \frac{\rho_i}{\rho}$$

essendo ρ_i la densità parziale degli ioni, e ρ la densità della miscela. Supponendo che gli atomi, al più, siano semplicemente ionizzati, così che $n_i = n_e$, l'equazione di stato della miscela risulta

$$(2) \quad p = \rho \mathcal{R}T (1 + \alpha)$$

dove $\mathcal{R}$ è la costante del gas monoatomico considerato, p e T sono la pressione e la temperatura della miscela. L'energia interna dell'unità di massa della miscela è data dalle

$$(3) \quad E = \frac{3}{2} \mathcal{R}T (1 + \alpha) + E_i + \alpha \mathcal{R}T_j$$

in cui E_i è l'energia corrispondente alla eccitazione elettronica degli atomi e degli ioni, mentre T_j è la *temperatura caratteristica di ionizzazione* definita dalla

$$(4) \quad \epsilon_j = k T_j \quad (k = \text{costante di Boltzmann}).$$

Per un flusso unidimensionale non stazionario le equazioni che devono essere soddisfatte sono:

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad (\text{equazione di continuità della miscela})$$

in cui u è la velocità, e x e t sono le coordinate spaziale e temporale;

$$(6) \quad \rho \frac{d\alpha}{dt} = \mathfrak{N} \quad (\text{equazione di continuità degli ioni})$$

essendo $\mathfrak{N}$ la massa degli ioni prodotta nell'unità di tempo per unità di volume (*funzione di sorgente degli ioni*);

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{equazione della quantità di moto})$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + E \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} \right) \right] = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{equazione dell'energia})$$

se F è il flusso di energia raggiante attraverso l'unità di superficie normale all'asse x definito dalla

$$(9) \quad F = \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{4\pi} I_\nu \cos \theta d\omega$$

essendo ν la frequenza delle radiazioni; θ l'angolo che una retta generica per il punto P forma coll'asse x ; I_ν l'intensità specifica della radiazione di frequenza ν ; $d\omega$ l'angolo solido corrispondente al cono elementare il cui vertice è in P e l'asse è una retta qualunque inclinata dell'angolo θ su x . Se Φ è l'angolo che il piano per detta retta e l'asse x forma con un piano fisso di riferimento ($x; y$), è

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\Phi$$

e pertanto nell'ipotesi che I_ν non dipenda da Φ si ha

$$(9a) \quad F = 2\pi \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{\pi} I_\nu \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

2. FUNZIONE DI SORGENTE DEGLI IONI ED EQUAZIONI DI TRASPORTO DELL'ENERGIA RAGGIANTE. — In [1] abbiamo ricavata l'espressione esplicita della funzione di sorgente degli ioni $\mathfrak{N}$: essa è:

$$(10) \quad \mathfrak{N} = m_a [n_a n_i S_{12} + n_a Q_{12} - n_i^2 S_{21} - n_i^2 (Q_{21} + G_{21})]$$

in cui m_a è la massa atomica; inoltre:

$$(11a) \quad S_{12} = 2 (2\pi/m_e)^{1/2} e^4 (kT)^{-3/2} (T/T_j) \exp(-T_j/T) \times \\ \times [1 - (T_j/T) \exp(T_j/T) Ei(T_j/T)]$$

essendo m_e la massa di un elettrone, e la sua carica elettrica; $Ei(X)$ è l'integrale esponenziale

$$(11b) \quad Ei(X) = \int_X^{\infty} [\exp(-X_1)/X_1] dX_1; \\ S_{21} = \left(\frac{h^3}{2\pi m_e^2} \right) (\Omega_1/\Omega_2) e^4 (kT)^{-1} \epsilon_j^{-2}$$

in cui Ω_1 e Ω_2 sono le *funzioni di partizione* elettroniche rispettivamente degli atomi e degli ioni;

$$(11c) \quad Q_{21} = (2/\pi^{1/2}) \mathfrak{A} (kT)^{-1/2}$$

in cui

$$\mathfrak{A} = 4,7 \times 10^{13} \sum_{r=1}^{\infty} A(r) 1,6 \times 10^{-32} \text{ gm}^{1/2} \text{ cm}^4 \text{ sec}^{-2}$$

essendo le $A(r)$ costanti dipendenti dal numero quantico principale r , secondo la espressione della *sezione trasversale di ricombinazione* di un elettrone libero

e di un ione con emissione spontanea di un fotone ricavata da *E.G.C. Stueckelberg e P. W. Morse* [2]: la sommatoria è da estendersi a tutti i livelli quantici di energia corrispondenti all'eccitazione elettronica.

$$(11d) \quad Q_{12} = -2^{7/2} \pi m_e^{3/2} \Omega h^{-3} (\Omega_2/\Omega_1) kT_r \log [1 - \exp(-h\nu_j/kT_r)]$$

dove T_r è la *temperatura delle radiazioni* la cui frequenza ν è maggiore di ν_j , così definita: se J_ν è l'*intensità specifica media* delle radiazioni di frequenza ν

data dalla $J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu d\omega$, si assume, per $\nu \geq \nu_j$, la variazione di J_ν con ν

data dalla *funzione di Planck*

$$J_\nu = (2h^3/c^2) [\exp(h\nu/kT_r) - 1]^{-1}$$

corrispondente a una temperatura T_r delle radiazioni, che è diversa dalla temperatura T del gas;

$$(11e) \quad G_{21} = 2\pi^{-1/2} \Omega (kT)^{-1/2} [T_r/(T_r + T)] \exp(-T_j/T_r) \times \\ \times F[1, 1 + T_r/T; 2 + T_r/T; \exp(-T_j/T_r)]$$

essendo $F(a, b; c; X)$ la funzione ipergeometrica di parametri a, b, c , e di argomento X .

Per $(T/T_j) \ll 1$; $\exp(-T_j/T_r) \ll 1$, la (10) può essere scritta nella forma

$$(12) \quad \mathfrak{N}/m_a = n_a n_i 2^{3/2} \pi^{1/2} m_e^{-1/2} e^4 (kT)^{-3/2} (T/T_j)^2 \exp(-T_j/T) + \\ + n_a 2^{7/2} \pi h^{-3} m_e^{3/2} \Omega (\Omega_2/\Omega_1) (kT_r) \exp(-T_j/T_r) - \\ - n_i^3 2^{-1} \pi^{-1} h^3 e^4 m_e^{-2} \varepsilon_j^{-2} (\Omega_1/\Omega_2) (kT)^{-1} - n_i^2 2 \pi^{-1/2} \Omega (kT)^{-1/2}.$$

Nella [1] abbiamo pure dedotta l'espressione esplicita dell'equazione di trasporto della energia raggiante per $\nu \geq \nu_j$, che è

$$(13) \quad \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \frac{h\nu}{4\pi} [n_i^2 f(\varepsilon) \alpha_2^{(1)} h + n_i^2 f(\varepsilon) \beta_2^{(1)} h I_\nu - 4\pi n_a \psi_1^{(2)} I_\nu]$$

in cui $f(\varepsilon)$ è la funzione di distribuzione dell'energia ε degli elettroni liberi; $\alpha_2^{(1)}$ è la probabilità per secondo, per elettrone libero di energia compresa tra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$, che un elettrone sia catturato da un ione e un fotone sia emesso spontaneamente, mentre $\beta_2^{(1)}$ è la probabilità corrispondente per la ricombinazione indotta in un campo di radiazioni di intensità specifica unitaria; $\psi_1^{(2)}$ infine è la probabilità che un atomo catturi un *quanto* di energia raggiante in un campo di radiazioni di intensità specifica unitaria. Nella (13) per $f(\varepsilon)$ è da prendersi la *funzione di distribuzione Maxwelliana*:

$$f(\varepsilon) = (2/\pi^{1/2}) (kT)^{-3/2} (\varepsilon^{1/2}) \exp(-\varepsilon/kT)$$

mentre le $\alpha_2^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$ e $\psi_1^{(2)}$ come indicato in [1] sono date dalle

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_2^{(1)} = \Omega \varepsilon^{-1/2} & ; \quad \beta_2^{(1)} = c^2 \Omega (2h\nu^3 \varepsilon^{1/2})^{-1}; \\ \psi_1^{(2)} = 2^{1/2} m_e^{3/2} c^2 \Omega (\Omega_2/\Omega_1) (h\nu)^{-3}. \end{cases}$$

3. ESPRESSIONE ESPlicita DELL'EQUAZIONE DI TRASPORTO DELL'ENERGIA RAGGIANTE. — Ricaviamo ora una espressione esplicita dell'equazione di trasporto dell'energia radiante diversa da quella ottenuta in [1]: moltiplicando per $\cos \theta d\omega$, ed integrando rispetto a ω su tutta la sfera, ricaviamo dalla (13)

$$(14') \quad \frac{\partial}{\partial x} p_{xx,v} = - \frac{h\nu}{c} n_a \psi_1^{(2)} F_{v,3}$$

dove si è posto

$$(15 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx,v} = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi I_v \cos^2 \theta \sin \theta d\theta; \\ F_{v,3} = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi I_v \sin \theta \cos \theta d\theta, \end{array} \right.$$

mentre è stato trascurato $\frac{n_i^2 f(\epsilon) \beta_2^{(1)} h}{4 \pi n_a \psi_1^{(2)}}$ rispetto all'unità, il che è certamente lecito se il grado di ionizzazione α non è *quasi uno*. Appare dalle (15) che la $p_{xx,v}$ è lo *sforzo specifico* delle radiazioni corrispondente all'elemento di area normale all'asse x e alle radiazioni di frequenza ν , mentre la $F_{v,3}$ è il flusso di energia radiante corrispondente allo stesso elemento e alle stesse radiazioni. D'altra parte dalla (13) moltiplicando per $d\omega$ e integrando ancora su tutta la sfera si ha

$$\frac{\partial F_{v,3}}{\partial x} = h\nu [n_i^2 f(\epsilon) \alpha_2^{(1)} h + n_i^2 f(\epsilon) \beta_2^{(1)} h J_v - 4 \pi n_a \psi_1^{(2)} J_v]$$

di guisa che la (14) derivata rispetto a x dà

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n_a} \frac{\partial}{\partial x} p_{xx,v} \right) = - \frac{h^2 \nu^2}{c} \psi_1^{(2)} [n_i^2 f(\epsilon) \alpha_2^{(1)} h + \\ + n_i^2 f(\epsilon) \beta_2^{(1)} h J_v - 4 \pi n_a \psi_1^{(2)} J_v].$$

Introduciamo ora l'ipotesi che la $p_{xx,v}$ sia data per $\nu \geq \nu_j$ dalla

$$(17) \quad p_{xx,v} = \frac{4 \pi}{3 c} \frac{2 h \nu^3}{c^2} [\exp(h\nu/kT_r)^{-1}]^{-1}$$

assunzione questa, che è del tutto coerente con quella prima fatta per esprimere J_v .

Dalla (16) integrando rispetto a ν nell'intervallo $\nu_j \leq \nu \leq \infty$, tenendo conto della (17), ricaviamo.

$$(18) \quad \frac{2^{5/2} \pi \epsilon_j^6}{3 h^3 c^4 L_o m_e^{3/2} \mathfrak{A}(\Omega_2/\Omega_1)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho^*(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \mathfrak{F}\left(\frac{T_r}{qT_j}\right) \exp\left(-q \frac{T_j}{T_r}\right) \right] \right\} = \\ = - \frac{\partial F_3}{\partial x} = - 2 \pi^{-1/2} \alpha^2 \rho^{*2} L_o^2 \mathfrak{A} (kT)^{1/2} \{ 1 + (T_j/T) + [\varphi_1 + (T_j/T) \times \\ \times T_r (T_r + T)^{-1} F] \exp(-T_j/T_r) \} + (1-\alpha) \rho^* L_o 2^{7/2} \pi h^{-3} m_e^{3/2} \mathfrak{A} \times \\ \times (\Omega_2/\Omega_1) (kT_r)^2 [1 + (T_j/T_r) + \varphi_2] \exp(-T_j/T_r)$$

dove si sono usate le formule

$$(19) \quad n_a = (1 - \alpha) \rho^* L_o \quad ; \quad n_i = \alpha \rho^* L_o \quad ; \quad \rho^* = \rho / \rho_o \quad ; \quad F_3 = \int_{v_j}^{\infty} F_{v,3} dv$$

essendo $L_o = \frac{\rho_o}{m_a}$, se ρ_o è una densità di riferimento; il significato degli altri simboli è il seguente:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(X) = X(1 + 5X + 20X^2 + 60X^3 + 120X^4 + 120X^5) \\ \varphi_i = T_r^2 (T + T_r)^{-2} + T_r^2 (2T + T_r)^{-2} \exp(-T_j/T_r) + \dots \\ \varphi_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{T_j}{2T_r}\right) \exp(-2T_j/T_r) + \left(\frac{1}{9} + \frac{T_j}{3T_r}\right) \exp(-3T_j/T_r) + \dots \end{array} \right.$$

F è la funzione ipergeometrica

$$F \left[1 + \frac{T_r}{T}, 1; 2 + \frac{T_r}{T}; \exp(-T_j/T_r) \right].$$

È da osservare che l'espressione ora ricavata di $\frac{\partial F_3}{\partial x}$ è formalmente analoga a quella che dà la variazione del flusso di energia raggianti per $v \leq v_j$, quale è indicata in [1].

Considerando di nuovo le condizioni $(T/T_j) \ll 1$; $\exp(-T_j/T_r) \ll 1$, la (18) si semplifica nella

$$(18 \text{ bis}) \quad \frac{2^{5/2} \pi \epsilon_j^6}{3 h^3 c^4 L_o m_e^{3/2} \mathcal{A}(\Omega_2/\Omega_1)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho^* (1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{F}(T/T_j) \times \right. \\ \left. \times \exp(-T_j/T_r) \right\} = -2 \pi^{-1/2} \alpha^2 \rho^{*2} L_o^2 \mathcal{A}(kT)^{1/2} (T_j/T) + \\ + [1 - \alpha] \rho^* L_o \pi h^{-3} m_e^{3/2} \mathcal{A}(\Omega_2/\Omega_1) (kT_r)^2 (T_j/T_r) \exp(-T_j/T_r).$$

4. FORMA ADIMENSIONATA DELLE EQUAZIONI DI CONTINUITÀ DEGLI IONI E DI TRASPORTO DELLA ENERGIA RAGGIANTE. - L'equazione di continuità degli ioni può essere resa adimensionata procedendo come è indicato in [1]: risulta

$$(21) \quad \rho^* \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho^* \alpha) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho^* \alpha u) = \alpha (1 - \alpha) \rho^{*2} \tau_{ic}^{-1} (T/T_o)^{1/2} \times \\ \times \exp[(T_j/T_o)(1 - T_o/T)] + (1 - \alpha) \rho^* \tau_{ir}^{-1} (T_r/T_{ro}) \times \\ \times \exp[(T_j/T_{ro})(1 - \frac{T_{ro}}{T_r})] - \alpha^3 \rho^{*3} \tau_{nc}^{-1} (T_o/T) - \alpha^2 \rho^{*2} \tau_{nr}^{-1} (T_o/T)^{1/2}$$

in cui T_o è una temperatura di riferimento del gas, T_{ro} è una temperatura di riferimento delle radiazioni; τ_{ic} e τ_{ir} sono i tempi caratteristici di ionizzazione per collisione e per radiazione, rispettivamente dati dalla

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{ic} = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} e^{-4} m_e^{1/2} \epsilon_j^{3/2} L_o^{-1} (T_j/T_o)^{1/2} \exp(T_j/T_o) \\ \tau_{ir} = 2^{-7/2} \pi^{-1} h^3 m_e^{-3/2} \epsilon_j^{-1} \mathcal{A}^{-1}(\Omega_1/\Omega_2) (T_j/T_{ro}) \exp(T_j/T_{ro}). \end{array} \right.$$

Analogamente, τ_{nc} e τ_{nr} sono i *tempi caratteristici di ricombinazione* per collisione e per radiazione, definiti dalle

$$(22 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \tau_{nc} = 2 \pi e^{-4} h^{-3} m_e^2 \epsilon_j^3 (\Omega_2/\Omega_1) L_o^{-2} (T_o/T_j) \\ \tau_{nr} = 2^{-1} \pi^{1/2} \epsilon_j^{1/2} \mathcal{A}^{-1} L_o^{-1} (T_o/T_j)^{1/2}. \end{cases}$$

Possiamo pure rendere adimensionata la (18 bis): posto

$$(23) \quad \begin{cases} \Phi = 2 \pi \epsilon_j^4 c^{-2} h^{-3} \mathcal{F} (T_r/T_j) \exp (-T_j/T_r); \\ \Phi^* = 2^{-1} \pi^{-1} c^2 h^3 \epsilon_j^{-4} (T_j/T_{ro}) \exp (T_j/T_{ro}) \Phi; \\ B = \tau_{ir}/\tau_{nr} \\ l_3 = 2^{-5/2} c^{-2} m_e^{-3/2} \epsilon_j^2 \mathcal{A}^{-1} (\Omega_1/\Omega_2) L_o^{-1} \end{cases}$$

la (18 bis) può essere scritta nella forma

$$(24) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho^* (1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \Phi^* \right] = 3 \times 2^{-4} l_3^{-2} \{ -B \alpha^2 \rho^{*2} (T_o/T)^{1/2} + \\ + (1-\alpha) \rho^* (T_r/T_{ro}) \exp [(T_j/T_{ro}) (1 - \frac{T_{ro}}{T_r})] \}$$

in cui la lunghezza l_3 ha il significato, già indicato in [1], di *lunghezza caratteristica* del trasporto di energia raggiante (per $\nu \geq \nu_j$). Per quanto poi si riferisce ai tempi caratteristici τ_{ic} , τ_{ir} , τ_{nc} , τ_{nr} valgono le considerazioni e i calcoli riportati in [1] per la valutazione della efficienza relativa delle radiazioni e delle collisioni per le reazioni di ionizzazione e di ricombinazione.

5. APPLICAZIONE. — Le equazioni (2), (3), (5), (7), (8), (18), (21), (24) insieme con quella data in [1] per esprimere il flusso di energia raggiante F_r per $\nu \leq \nu_j$, e della $F = F_r + F_3$, costituiscono un sistema di 10 equazioni nelle 10 funzioni incognite p , ρ , T , α , u , E , F , T_r , F_r , F_3 . Ad esse debbono essere aggiunte, per ogni dato problema, le condizioni al contorno e ai limiti propri del problema in esame.

Noi faremo innanzi tutto una applicazione delle equazioni sopra indicate alla determinazione dell'effetto ionizzante delle radiazioni a monte di un'onda d'urto retta stazionaria di forte intensità.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. FERRARI e J. H. CLARKE, Atti del Simposio sulle « Alte temperature in Aeronautica », Politecnico di Torino, 10-12 settembre 1962; C. FERRARI e J. H. CLARKE, Technical Report CM - 1020 - Division of Engineering - Brown University - Providence - R.I.; (Gennaio 1963).
- [2] E. C. G. STUECKELBERG e P. M. MORSE, « Physical Review », vol. 36, n. 16 (1930).