Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carmelo Mammana

Gruppi di corrispondenze cremoniane di S_r definiti da proprietà delle jacobiane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.1-2, p. 27–34.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_27_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Geometria. — *Gruppi di corrispondenze cremoniane di* S_r *definiti da proprietà delle jacobiane* (*). Nota (**) di CARMELO MAMMANA, presentata dal Socio B. SEGRE.

1. In questa Nota ci occupiamo di alcuni gruppi di corrispondenze cremoniane di uno spazio proiettivo complesso S_r, ad $r \geq 2$ dimensioni, i quali sono definiti da proprietà delle jacobiane delle corrispondenze stesse.

Dimostriamo dapprima, nel n. 2, una proprietà gruppale molto generale e, nel n. 3, un teorema di esistenza. Deduciamo da ciò, nei nn. 4–9, la esistenza di vari tipi di gruppi di corrispondenze cremoniane e li confrontiamo fra di loro. Infine, nel n. 10, dimostriamo una proprietà atta a chiarire le difficoltà che presenta il problema di stabilire un teorema di fattorizzazione per la dimensione $r \geq 3$.

2. In uno spazio proiettivo complesso S_r, ad $r \geq 2$ dimensioni, fissiamo un insieme $\{F\}$ qualunque di ipersuperficie irriducibili. Indichiamo con $G^{(b)}\{F\}$ l'insieme i cui elementi sono tutte le omografie (non degeneri) di S_r e tutte le corrispondenze cremoniane T di S_r che godono della seguente proprietà:

A) Ogni componente (irriducibile) della jacobiana di T e ogni componente della jacobiana della inversa T^{-1} è *birazionalmente identica* a qualche ipersuperficie di $\{F\}$ (1).

Dimostriamo che:

a) $G^{(b)}\{F\}$ *è un sottogruppo del gruppo* G *di tutte le corrispondenze cremoniane di* S_r.

Infatti, se l'insieme $G^{(b)}\{F\}$ contiene una corrispondenza, allora esso contiene anche l'inversa, per la definizione stessa di $G^{(b)}\{F\}$. Basterà quindi provare che, se $G^{(b)}\{F\}$ contiene due corrispondenze T_1 e T_2, allora esso contiene anche il prodotto $T = T_1 T_2$. Ciò è evidente se T è un'omografia, in quanto allora essa è per definizione una corrispondenza di $G^{(b)}\{F\}$. Se $T = T_1 T_2$ non è un'omografia, allora « ogni componente irriducibile della jacobiana di T o è una componente irriducibile della jacobiana di T_1, oppure è mutata (birazionalmente) da T_1 in una componente irriducibile della jacobiana di T_2 (2) ». Ne segue che ogni componente della jacobiana di T è bira-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1963.

(1) Se non esistono corrispondenze cremoniane di S_r che godono della proprietà A), allora l'insieme $G^{(b)}\{F\}$ è l'insieme delle omografie di S_r.

(2) G. DANTONI, *Sulla possibilità di decomporre una corrispondenza cremoniana fra spazi ad* $r \geq 3$ *dimensioni, nel prodotto di corrispondenze cremoniane di dato ordine*, « Annali di Matematica », ser. IV, tomo XXIX, p. 244 (1949).

zionalmente identica a qualche ipersuperficie dell'insieme $\{F\}$. Inoltre, poiché T_1^{-1} e T_2^{-1} sono elementi di $G^{(b)}\{F\}$ come T_1 e T_2, ed è $T^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$, si ha che anche ogni componente della jacobiana di T^{-1} è birazionalmente identica a qualche ipersuperficie dell'insieme $\{F\}$, e quindi $T = T_1 T_2$ è una corrispondenza dell'insieme $G^{(b)}\{F\}$.

Indichiamo ora con $G^{(c)}\{F\}$ l'insieme i cui elementi sono tutte le omografie (non degeneri) di S_r e tutte le corrispondenze cremoniane T di S_r che godono della seguente proprietà:

B) Ogni componente (irriducibile) della jacobiana di T e ogni componente della jacobiana dell'inversa T^{-1} è *cremonianamente identica* a qualche ipersuperficie di $\{F\}$.

Con ragionamento analogo a quello fatto per provare la proprietà a), si dimostra che:

b) $G^{(c)}\{F\}$ *è un sottogruppo del gruppo* G *di tutte le corrispondenze cremoniane di* S_r.

Poiché ogni elemento di $G^{(c)}\{F\}$ è un elemento di $G^{(b)}\{F\}$, indicato con H il gruppo delle omografie (non degeneri) di S_r, si ha:

$$H \subseteq G^{(c)}\{F\} \subseteq G^{(b)}\{F\} \subseteq G.$$

3. Dimostriamo che:

Fissato comunque un cono irriducibile C *di* S_r, *esistono corrispondenze cremoniane di* S_r *che hanno le due jacobiane (della diretta e della inversa) col cono* C *come unica componente irriducibile.*

Infatti, scegliamo il riferimento in S_r in modo che il punto $A_r \equiv (0, 0, \cdots, 0, 1)$ sia un vertice del cono C. Dopo ciò l'equazione di C risulta del tipo $f(x) = 0$ con $f(x)$ forma irriducibile nelle sole variabili $x_0, x_1, \cdots, x_{r-1}$, e di grado $n \geq 1$ uguale all'ordine del cono C. Sia $g(x)$ una forma nelle sole variabili $x_0, x_1, \cdots, x_{r-1}$, di grado $n+1$ e non divisibile per $f(x)$.

La corrispondenza cremoniana:

$$(T) \quad \begin{cases} x'_i = f(x)\, x_i \\ x'_r = f(x)\, x_r + g(x) \end{cases} \qquad (T^{-1}) \quad \begin{cases} x_i = f(x')\, x'_i \\ x_r = f(x')\, x'_r - g(x') \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \cdots, r-1$$

soddisfa alle condizioni richieste dall'enunciato, perché le jacobiane di T e di T^{-1} sono:

$$J(x) = nf^{r+1}(x) \quad , \quad J'(x') = nf^{r+1}(x').$$

Dalle proprietà a) e b) del n. 2 e da quella ora dimostrata, si possono ottenere risultati più espressivi particolarizzando opportunamente l'insieme $\{F\}$.

4. Se come insieme $\{F\}$ scegliamo l'insieme delle ipersuperficie di S_r, con $r \geq 3$, che hanno una data irregolarità (superficiale) $q \geq 0$, dai nn. 2, 3 segue che:

a) *L'insieme* G_q *i cui elementi sono le omografie (non degeneri) di* $S_r (r \geq 3)$ *e le corrispondenze cremoniane di* S_r *che hanno le due jacobiane (della diretta e della inversa) entrambe a componenti (irriducibili) tutte di irregolarità* q, *è un sottogruppo del gruppo* G *di tutte le corrispondenze cremoniane di* S_r. *Inoltre si ha:*

$$H \subset G_q \subset G \qquad (q = 0, 1, 2, \cdots).$$

La prima parte si ha infatti subito dal n. 2 a); la seconda parte segue dal n. 3, perché in S_r con $r \geq 3$ esistono coni C di irregolarità $q = 0, 1, 2, \cdots$.

Se come insieme $\{F\}$ scegliamo l'insieme delle ipersuperficie di S_r, con $r \geq 3$, che hanno irregolarità minore od uguale a q, dai nn. 2, 3 segue che:

b) *L'insieme* G'_q *i cui elementi sono le omografie (non degeneri) di* $S_r (r \geq 3)$ *e le corrispondenze cremoniane di* S_r *che hanno le due jacobiane (della diretta e della inversa) entrambe a componenti (irriducibili) tutte di irregolarità minore o uguale a* q, *è un sottogruppo del gruppo* G *di tutte le corrispondenze cremoniane di* S_r. *Inoltre si ha:*

$$H \subset G_0 = G'_0 \subset G'_1 \subset G'_2 \subset \cdots.$$

5. Dai risultati dei nn. 2, 3 si possono dedurre proprietà analoghe a quelle del n. 4, considerando, invece della irregolarità q, uno o più invarianti birazionali assoluti di ipersuperficie di $S_r (r \geq 3)$ che sono birazionalmente identiche a coni, invarianti birazionali assoluti pertinenti quindi a varietà ad $r - 2$ dimensioni.

Se, per esempio, in S_4 $(r = 4)$ come insieme $\{F\}$ scegliamo l'insieme dei coni a sezione di genere geometrico assegnato p_g [oppure $\leq p_g$], otteniamo che:

L'insieme $\overline{G}_{p_g}$ $[\overline{G}'_{p_g}]$ *i cui elementi sono le omografie (non degeneri) di* S_4 *e le corrispondenze cremoniane di* S_4 *che hanno le due jacobiane a componenti tutte birazionalmente identiche a coni di genere geometrico* p_g $[\leq p_g]$, *è un sottogruppo del gruppo* G *di tutte le corrispondenze cremoniane di* S_4. *Inoltre si ha:*

$$H \subset \overline{G}_{p_g} \subset G \qquad (p_g = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$H \subset \overline{G}_0 = \overline{G}'_0 \subset \overline{G}'_1 \subset G'_2 \subset \cdots.$$

6. Se come insieme $\{F\}$ scegliamo *una* ipersuperficie *irriducibile* $f(x) = 0$ di $S_r (r \geq 2)$, in base al n. 2 avremo i seguenti due sottogruppi del gruppo di tutte le corrispondenze cremoniane di S_r:

a) Il sottogruppo $G_f^{(b)}$ i cui elementi sono le omografie (non degeneri) di S_r e le corrispondenze cremoniane di S_r che hanno le due jacobiane entrambe a componenti (irriducibili) tutte *birazionalmente identiche* all'ipersuperficie f.

b) Il sottogruppo $G_f^{(c)}$ i cui elementi sono le omografie (non degeneri) di S_r e le corrispondenze cremoniane di S_r che hanno le due jacobiane entrambe a componenti (irriducibili) tutte *cremonianamente identiche* all'ipersuperficie f.

Dimostriamo ora che:

c) *L'insieme* $G_f^{(0)}$ *i cui elementi sono le omografie (non degeneri) di* S_r *che mutano in sè l'ipersuperficie irriducibile* f *e le corrispondenze cremoniane di* S_r *che hanno le due jacobiane (della diretta e della inversa) con la* f *come unica componente irriducibile è un sottogruppo del gruppo* G *di tutte le corrispondenze cremoniane di* S_r.

Infatti, l'insieme $G_f^{(0)}$ non è vuoto perché l'omografia identica è un suo elemento; inoltre se l'insieme $G_f^{(0)}$ contiene una corrispondenza cremoniana, allora esso contiene anche l'inversa per la definizione stessa di $G_f^{(0)}$. Basterà quindi provare che, se $G_f^{(0)}$ contiene due corrispondenze T_1 e T_2, allora esso contiene anche il prodotto $T = T_1 T_2$. Ciò è ovvio nell'ipotesi che T sia una omografia, in quanto allora da $T_1 = T T_2^{-1}$ e dalla proprietà ricordata nel n. 2 a), segue che la f, quale componente irriducibile della jacobiana di T_1 ma non di quella di T, è mutata da T in una componente irriducibile della jacobiana di T_2^{-1}; cioè nella f stessa; T pertanto muta in sè la f, e quindi è una corrispondenza dell'insieme $G_f^{(0)}$.

Se $T = T_1 T_2$ non è un'omografia, allora una componente irriducibile g della sua jacobiana o è una componente irriducibile della jacobiana di T_1 e quindi coincide con la f; oppure è mutata birazionalmente da T_1 in f: T_1 allora è un'omografia di $G_f^{(0)}$, e quindi muta in sè la f, onde ancora g coincide con f. Dunque in entrambi i casi la jacobiana di T ha la f come unica componente irriducibile. Poiché T_1^{-1} e T_2^{-1} sono elementi di $G_f^{(0)}$ come T_1 e T_2, dalla $T^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$ e da quanto sopra segue che anche la jacobiana di T^{-1} ha la f come unica componente irriducibile e quindi T è una corrispondenza dell'insieme $G_f^{(0)}$.

Risulta così provato che $G_f^{(0)}$ è un sottogruppo di G.

Se indichiamo con H_f il gruppo delle omografie che mutano in sé l'ipersuperficie f, si ha:

$$H_f \subseteq G_f^{(0)} \subseteq G_f^{(c)} \subseteq G_f^{(b)} \subseteq G.$$

Queste relazioni si possono precisare particolarizzando oppurtunamente l'ipersuperficie f, come faremo nei nn. 7, 8, 9.

7. *Se* f *è un cono irriducibile di ordine maggiore di uno (il che implica che sia* $r \geq 3$*), allora si ha:*

$$H_f \subset G_f^{(0)} \subset G_f^{(c)} \subseteq G_f^{(b)} \subset G.$$

Non può infatti essere $H_f = G_f^{(0)}$, perché nel n. 3 abbiamo visto che esistono corrispondenze cremoniane che hanno le due jacobiane col cono C come unica componente irriducibile. Del pari non può essere $G_f^{(0)} = G_f^{(c)}$ perché il prodotto di un'omografia che non sta in H_f per una corrispondenza cremoniana non omografica di $G_f^{(o)}$, è una corrispondenza che sta in $G_f^{(c)}$ ma non in $G_f^{(o)}$, e ciò in base all'osservazione ricordata nel n. 2 a). Non può infine risultare $G_f^{(b)} = G$, perché, essendo $r \geq 3$, possiamo fissare in S_r un cono C irriducibile e non birazionalmente identico ad f; la corrispondenza del n. 3, individuata da C, sta allora in G ma non in $G_f^{(b)}$.

8. *Supponiamo ora che f sia un iperpiano di* S_r *con* $r \geq 2$. In queste ipotesi, con ragionamento analogo a quello del n. 7, si dimostra che risulta:

$$H_f \subset G_f^{(o)} \subset G_f^{(c)} \subseteq G_f^{(b)} \subseteq G.$$

Inoltre, *sempre nell'ipotesi di f iperpiano ed* $r \geq 2$, si ha che:

a) il gruppo $G_f^{(o)}$ è il noto gruppo delle corrispondenze cremoniane di S_r che sono *intere rispetto all'iperpiano f*. Questo gruppo è stato studiato da vari Autori [3], specialmente nel caso $r = 2$;

b) il gruppo $G_f^{(c)}$ è il gruppo delle corrispondenze cremoniane di S_r che sono omografie oppure hanno le due jacobiane entrambe *a componenti irriducibili cremonianamente identiche ad un iperpiano* [4];

c) il gruppo $G_f^{(b)}$ è il gruppo delle corrispondenze cremoniane di S_r che sono omografie oppure hanno le due jacobiane entrambe *a componenti tutte razionali;*

d) *per $r \geq 3$ si ha:*

$$G_f^{(b)} \subset G$$

in quanto esistono corrispondenze cremoniane di S_r ($r \geq 3$) con la jacobiana che non è a componenti razionali (n. 3);

e) *per $r = 2$ si ha:*

$$G_f^{(c)} = G_f^{(b)} = G.$$

(3) Sulle corrispondenze cremoniane intere vedasi: O. H. KELLER, *Ganze cremona Transformationen*, «Monatsh. für Math. und Phys.», vol. 47 (1939); H. W. E. JUNG, *Über Ganze birazionale Transformationen der Ebene*, «Journal für Reine und Ang. Math.», vol. 184 (1942); L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni cremoniane che conservano le aree od i volumi*, «Boll. U.M.I.», ser. 3ª, vol. 7 (1952); W. ENGEL, *Ein Satz über Ganze Cremona Transformationen der Ebene*, «Math. Ann.», vol. 130 (1955); B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II, Roma, Docet (1956); B. SEGRE, *Corrispondenze di Möbius e trasformazioni cremoniane intere*, «Atti Acc. Scienze di Torino», vol. 91 (1956–57); W. ENGEL, *Ganze Cremona Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene*, «Math. Ann.», vol. 136 (1958); B. SEGRE, *Variazione continua ed omotopia in geometria algebrica*, «Annali di Matem. pura ed applicata», ser. IV, vol. 50 (1960); W. GRÖBNER, *Sopra un teorema di B. Segre*, «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. 31 (1961); A. GUTHWIRT, *An inequality for pencils of plane curves*, «Proceed. of the A.M.S.», vol. 12 (1961); L. MURACCHINI, *Intorno alle trasformazioni cremoniane che conservano le aree*, «Rend. Sc. Ist. Lombardo», vol. 95 (1961); M. ROSATI, *Classificazione proiettiva delle trasformazioni cremoniane intere fra due piani*, «Rendiconti di Matematica», vol. 21 (1962); C. MAMMANA, *Corrispondenze cremoniane e loro jacobiane*, «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. 33 (1962).

(4) Non mi sembra che questo gruppo $G_f^{(c)}$ ed il successivo $G_f^{(b)}$ siano stati considerati da altri Autori, per $r \geq 3$.

Infatti, una corrispondenza cremoniana piana T è il prodotto di un numero finito di corrispondenze quadratiche; e queste hanno le due jacobiane a componenti irriducibili che sono rette. Ne segue, per la proprietà ricordata nel n. 2 a), che la T o è un'omografia oppure ha le due jacobiane a componenti irriducibili che sono cremonianamente identiche a rette; cioè $G_f^{(c)} = G$. Rileviamo che:

Le componenti irriducibili della jacobiana di una corrispondenza cremoniana piana sono tutte cremonianamente identiche a rette.

9. Supponiamo infine che *f sia una curva piana di genere $p \geq 0$*. In questa ipotesi, dalla definizione dei gruppi H_f, $G_f^{(o)}$, $G_f^{(c)}$, $G_f^{(b)}$, G, e dalla proprietà della fine del n. 8, segue che:

a) *se f non è razionale, si ha:*

$$H_f = G_f^{(o)} = G_f^{(c)} = G_f^{(b)} \subset G;$$

b) *se f è razionale, ma non è cremonianamente identica ad una retta, si ha:*

$$H_f = G_f^{(o)} = G_f^{(c)} \subset G_f^{(b)} = G;$$

c) *se f è cremonianamente identica ad una retta* [5], *si ha:*

$$H_f \subseteq G_f^{(o)} \subset G_f^{(c)} = G_f^{(b)} = G.$$

Le curve piane di ordine minimo che sono razionali, ma non cremonianamente identiche ad una retta, sono le sestiche con 10 punti doppi [6]. Il gruppo H_f delle omografie che mutano in sé una di queste sestiche con 10 punti doppi non è necessariamente costituito dalla sola identità. Per esempio, la sestica:

$$f \equiv (x_0 x_2 - x_1^2)^2 x_2^2 + (x_1 x_2 - x_0^2)^2 x_1^2 + (x_1 x_0 - x_2^2)^2 x_0^2 +$$

$$+ (x_2^2 - x_0^2) x_0^2 x_1^2 + (x_1^2 - x_2^2) x_0^2 x_2^2 + (x_0^2 - x_1^2) x_1^2 x_2^2 = 0$$

ha 10 punti doppi, che sono: il punto unità $U \equiv (1, 1, 1)$; il punto $A_0 \equiv (1, 0, 0)$ ed i due successivi ad esso sulla conica $x_0 x_1 - x_2^2 = 0$; il punto $A_1 \equiv (0, 1, 0)$ ed i due successivi ad esso sulla conica $x_1 x_2 - x_0^2 = 0$; il punto $A_2 = (0, 0, 1)$ ed i due successivi ad esso sulla conica $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$. La sestica suddetta è quindi razionale e non è cremonianamente identica ad una retta. Il gruppo H_f relativo ad essa è il gruppo delle 6 omografie che hanno

(5) Le curve piane cremonianamente identiche ad una retta sono caratterizzate dalla mancanza delle «successive aggiunte». Vedasi: F. ENRIQUES–O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli, 1924, vol. III, p. 188; G. CASTELNUOVO–F. ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, «Rend. Circ. Matem. di Palermo», t. 14 (1900).

(6) F. ENRIQUES–O. CHISINI, loc. cit. in (5), vol. III, p. 187.

unito il punto U e mutano in sé il gruppo dei tre punti A_0, A_1, A_2. Proviamo ora che:

d) *Il gruppo* H_f *è finito nei casi* a) *e* b), *mentre nel caso* c) *può essere finito od infinito.*

Osserviamo che, se H_f è infinito, allora la curva f è razionale e, con opportuna scelta del sistema di riferimento, la sua equazione si può scrivere nella forma [7]:

$$x_0^p x_2^{q-p} = x_1^q,$$

con $q \geq p > 0$, p e q primi tra loro.

Se $p = 1$, allora la corrispondenza cremoniana:

$$x_0' = x_0 x_2^q \quad , \quad x_1' = x_1^q x_2 \quad , \quad x_2' = x_1^{q+1}$$

muta la f nella retta: $x_0 = x_1$.

Se $p > 1$, posto $q = rp + s$, è $0 < s < p$, con p ed s primi tra loro; allora la corrispondenza cremoniana:

$$x_0' = x_0 x_2^r \quad , \quad x_1' = x_1^r x_2 \quad , \quad x_2' = x_1^{r+1}$$

muta la f nella curva:

$$x_0^p = x_1^{p-s} x_2^s,$$

che è ancora dello stesso tipo della f, ma di ordine inferiore. Operando sulla trasformata come sulla f, avremo che, dopo un numero finito di trasformazioni, la f sarà mutata in una f' la cui equazione potremo sempre scrivere nella forma $x_0 x_2^{q'-1} = x_1^{q'}$ e che è cremonianamente identica ad una retta.

Ne segue, che se H_f è infinito, f è cremonianamente identica ad una retta. Pertanto nei casi a) e b) il gruppo H_f è finito.

Per il caso c) osserviamo che, se f è una cubica razionale, essa è sempre cremonianamente identica ad una retta; se f è nodata H_f è finito e di ordine 6 [8], mentre se f è cuspidata H_f è infinito [9].

10. Con riferimento al gruppo G di tutte le corrispondenze cremoniane di S_r, chiameremo *classe k di generatori di* G un insieme k di corrispondenze cremoniane di S_r tale che *ogni* corrispondenza cremoniana di G o sta in k oppure è il prodotto di un numero finito di corrispondenze di k.

Mentre per $r = 2$ l'insieme delle corrispondenze quadratiche è notoriamente una classe k di generatori di G, per $r \geq 3$ G. Dantoni ha dimostrato che, fissato comunque un intero positivo n, esiste sempre una corrispondenza cremoniana di S_r la quale non si può ottenere come prodotto di un numero finito di corrispondenze cremoniane di ordine minore od uguale ad n [10]; sicché per $r \geq 3$ gli ordini delle corrispondenze di una qualunque classe k

(7) F. ENRIQUES-O. CHISINI, loc. cit. in (5), vol. III, p. 239 e p. 207.
(8) F. ENRIQUES-O. CHISINI, loc. cit. in (5), vol. III, p. 216.
(9) F. ENRIQUES-O. CHISINI, loc. cit. in (5), vol. II, p. 194.
(10) G. DANTONI, loc. cit. in (2), p. 246.

di generatori di G formano un insieme non limitato superiormente. Dimostriamo ora che:

Fissato comunque un cono irriducibile C *di* S_r, *in ogni classe k di generatori di* G *esiste almeno una corrispondenza la cui jacobiana ha una componente irriducibile che è cremonianamente identica al cono* C.

Consideriamo all'uopo una corrispondenza cremoniana T di S_r avente la jacobiana col cono C come componente irriducibile. Di siffatte corrispondenze ne esistono in base al n. 3. Sia k una qualunque classe di generatori di G. La T o è un elemento di k, ed allora esso fornisce la corrispondenza richiesta dal teorema; oppure essa è il prodotto di un numero finito di corrispondenze di k, cioè:

$$T = T_1 T_2 \cdots T_n$$

con $T_1, T_2, \cdots, T_n$ elementi di k. In questo caso, per la proprietà ricordata nel n. 2 a), il cono C o è componente della jacobiana di T_1 ed il teorema è vero, oppure C è mutato (biunivocamente) da T_1 in una ipersuperficie $C^{(1)}$ che è componente irriducibile della jacobiana di $T^{(1)} = T_2 T_3 \cdots T_n$. In questo caso o $C^{(1)}$ è componente della jacobiana di T_2 ed il teorema è vero, oppure $C^{(1)}$ è mutata (biunivocamente) da T_2 in una componente $C^{(2)}$ della jacobiana di $T^{(2)} = T_3 \cdots T_n$. Così continuando si prova il teorema.