
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ISRAEL N. HERSTEIN

Sul Teorema di Goldie

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 35 (1963), n.1-2, p. 23-26.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_23_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Sul Teorema di Goldie* (*). Nota (**) di ISRAEL N. HERSTEIN, presentata dal Socio B. SEGRE.

In un articolo recente [3], il Procesi diede una bella dimostrazione, altamente concettuale, della prima metà del teorema di Goldie. Questo teorema importantissimo ha la storia seguente: nel suo primo articolo [1], il Goldie dimostrò che un anello primo soddisfacente a certe condizioni ascendenti possiede un anello di quozienti e, inoltre, che questo anello di quozienti è precisamente l'algebra di tutte le matrici di un conveniente ordine sopra un corpo. Nel suo secondo articolo [2], egli lo estese quindi dal caso primo a quello d'un anello privo di ideali nilpotenti. Per tali anelli, il nuovo teorema asserisce l'esistenza d'un anello di quozienti avente la forma d'un anello semi-semplce con condizioni minimali.

Mostreremo qui come si possa passare dal caso primo al caso semi-primo (nel quale cioè l'anello non contiene ideali nilpotenti). Ci pare che la combinazione della dimostrazione data dal Procesi con gli sviluppi qui presentati fornisca una dimostrazione del risultato complessivo breve, semplice e naturale. Dal punto di vista didattico, essa permette così l'insegnamento dei suddetti teoremi ad un livello abbastanza elementare, e precisamente subito dopo il teorema di Wedderburn.

In un anello arbitrario, R , chiameremo *annullatore sinistro* l'insieme di tutti gli elementi di R che annullano a sinistra un certo sottoinsieme di R . Si dice che R è *semi-primo* quando l'ideale (0) è il solo ideale nilpotente di R .

In seguito, R sarà un anello soddisfacente alle condizioni seguenti (le cosiddette condizioni di Goldie):

- 1° R è semi-primo;
 - 2° ogni insieme non-vuoto di annullatori sinistri di R possiede elementi massimali (rispetto all'insieme stesso);
 - 3° ogni somma diretta di ideali sinistri di R ha una lunghezza finita.
- Facciamo ora alcune semplici osservazioni.

a) Sia R un anello semi-primo e siano A, B due ideali bilaterali di R tali che $AB = (0)$; allora $BA = (0)$.

Ciò è manifesto in quanto BA è un ideale di R tale che $(BA)^2 = BABA = (0)$.

In tutto il presente lavoro denoteremo con M l'insieme costituito da tutti gli ideali di R che sono annullatori sinistri di ideali bilaterali di R diversi dallo (0) . In base alla 2°, M possiede elementi massimali. Sia A un tal elemento e sia $T(A) = \{x \in R \mid Ax = (0)\}$. Dall'osservazione a) seguono facilmente le:

(*) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1963.

(**) Questo lavoro era eseguito col contributo della « National Science Foundation, Grant GP-208, University of Chicago ».

b) Se x annulla a sinistra un ideale di R (diverso dallo (0)) contenuto in $T(A)$ allora, per A massimale in M , x dev'essere un elemento di A ;

c) Se A è massimale in M , risulta A anche massimale come annullatore destro e $T(A)A = (0)$.

Incominciamo la dimostrazione col

LEMMA 1. - Sia A massimale in M ; allora A è un ideale primo di R .

Dimostrazione. - Supponiamo che U, V siano ideali di R tali che $UV \subseteq A$. Si ha quindi $UVT(A) \subseteq AT(A) = (0)$. Se $V \not\subseteq A$ allora $VT(A) \neq (0)$ è un ideale di R contenuto in $T(A)$ ed annullato da U . Dall'osservazione b) consegue che $U \subseteq A$.

COROLLARIO. - Siano $A_1 \neq A_2$ elementi massimali in M ; allora $T(A_1) \subseteq A_2$.

Dimostrazione. - Poiché $A_1 T(A_1) = (0) \subseteq A_2$ ed $A_1 \not\subseteq A_2$, il corollario discende immediatamente dal lemma.

LEMMA 2. - M ha soltanto un numero finito di elementi massimali distinti.

Dimostrazione. - Siano $A_1, \dots, A_n$ massimali in M . Asseriamo che la somma $T(A_1) + \dots + T(A_n)$ è diretta. Per vederlo, notiamo che, siccome $T(A_i)T(A_j)$ annulla $A_i + A_j$, in virtù della massimalità degli A_k dev'essere $T(A_i)T(A_j) = (0)$ per $i \neq j$. Ora, se fosse $(0) \neq B = T(A_i) \cap (T(A_1) + \dots + T(\widehat{A_i}) + \dots + T(A_n))$ ($\widehat{}$ indica « omesso »), allora $B^2 \subseteq BT(A_i) \subseteq (T(A_1) + \dots + T(\widehat{A_i}) + \dots + T(A_n))T(A_i) = (0)$, il che implicherebbe la $B = (0)$, contro il supposto. Poiché in R non vi sono somme dirette infinite ne discende il lemma.

Siano $A_1, \dots, A_n$ tutti gli ideali massimali in M . Possiamo stabilire il

LEMMA 3. - $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (0)$.

Dimostrazione. - Supponiamo per assurdo che risulti $0 \neq W = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Siccome $W(T(A_1) + \dots + T(A_n)) = (0)$, dall'osservazione a) si trae $(T(A_1) + \dots + T(A_n))W = (0)$, ossia $T(A_1) + \dots + T(A_n)$ annulla a sinistra un ideale non nullo di R . Perciò $T(A_1) + \dots + T(A_n)$ dev'essere contenuto in qualche annullatore massimale, vale a dire $T(A_1) + \dots + T(A_n) \subseteq A_j$ per almeno un j soddisfacente alle $1 \leq j \leq n$. Ora, siccome $T(A_j) \subseteq T(A_1) + \dots + T(A_n)$, otteniamo $T(A_j) \subseteq A_j$. Ma questa relazione implica la $T(A_j)^2 \subseteq A_j T(A_j) = (0)$, da cui $T(A_j) = (0)$; e questa contraddizione prova l'asserto.

A questo punto siamo in grado di immergere R isomorficamente nella somma diretta $S = R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$, in cui ogni componente è un anello primo. Per finire, dobbiamo soltanto più mostrare che ogni R/A_i eredita da R le medesime condizioni ascendenti e che l'immersione di R in S possiede S come anello dei quozienti. Quando ciò sarà stato fatto, sapremo (in base di risultati del Procesì) che ogni R/A_i ha come anello dei quozienti l'algebra Q_i di tutte le matrici di un conveniente ordine sopra un corpo e che R è immerso in $Q = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_n$, un anello semi-semplce con condizioni minimali. Dopo aver dimostrato che Q è l'anello dei quozienti di R , avremo così stabilito l'intero teorema di Goldie.

Allo scopo suddetto, rileviamo intanto un risultato di per sé interessante.

SOTTOLEMMMA. — *Sia R un qualsiasi anello e sia A un ideale bilaterale di R che risulti un annullatore sinistro in R . Se $\bar{\lambda}$ è un annullatore sinistro in $\bar{R} = R/A$ e se λ è l'immagine inversa di $\bar{\lambda}$ in R , allora λ è un annullatore sinistro in R .*

La dimostrazione di questo fatto è semplice e diretta, e la lasciamo al lettore.

Abbiamo ormai tutto quanto ci occorre per stabilire il

LEMMA 4. — *Se R soddisfa alle condizioni di Goldie e se A è un annullatore sinistro massimale in M , allora anche R/A soddisfa alle condizioni di Goldie.*

Dimostrazione. — Sappiamo che A è primo in R ; quindi R/A è primo e dunque anche semi-primo. Dal sottolemma abbiamo una corrispondenza fra gli annullatori sinistri in R/A e certi annullatori sinistri in R . Ne consegue che la condizione ascendente sugli annullatori sinistri in R implica quella in R/A .

Ci rimane ora soltanto più da stabilire l'assenza di somme dirette infinite in R/A . Sia $\bar{\lambda}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\lambda}_m$ una somma diretta di ideali sinistri in R/A , e siano rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ le immagini inverse di $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m$. Rileviamo che $\lambda_i \cap (\lambda_1 + \cdots + \hat{\lambda}_i + \cdots + \lambda_m) \subseteq A$. Poiché ciascun $\bar{\lambda}_i$ è diverso dallo (0), $\lambda_i \not\subseteq A$, quindi $\lambda_i T(A) \neq (0)$, onde $T(A) \lambda_i \neq (0)$. Consideriamo gli insiemi $\mu_i = T(A) \lambda_i$; essi sono ideali sinistri di R , contenuti ciascuno nel corrispondente λ_i , onde

$$v_i = \mu_i \cap (\mu_1 + \cdots + \hat{\mu}_i + \cdots + \mu_m) \subseteq A.$$

Dall'altro canto, ogni $v_i \subseteq T(A)$, pertanto $v_i \subseteq A \cap T(A) = (0)$ (poiché R è semi-primo). Abbiamo così costruito in R una somma diretta di ideali sinistri, della stessa lunghezza di quella dataci in R/A . Non possono dunque esistere somme dirette infinite in R/A , il che completa la dimostrazione del lemma.

I lemmi 1-4 forniscono, tutti gli ingredienti occorrenti per raggiungere lo scopo di questa Nota, ossia il

TEOREMA (di Goldie). — *Se un anello R soddisfa alle condizioni di Goldie, allora R ha un anello dei quozienti, Q , e Q è un anello semi-semplce con condizioni minimali sugli ideali sinistri.*

Dimostrazione. — Siano, come dianzi, $A_1, \dots, A_n$ gli elementi massimali in M . Come abbiamo già visto, R/A_i è primo; poiché soddisfa alle condizioni di Goldie, esso ha un anello dei quozienti, Q_i , che è l'algebra di tutte le matrici di un conveniente ordine sopra un corpo. Posto $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ è naturale esaminare se tale Q non sia l'anello dei quozienti richiesto.

Esattamente come nella dimostrazione del sottolemma, si può provare che un elemento a di R è regolare se e soltanto se ogni immagine di a in ciascun R/A_i è regolare in R/A_i , e quindi invertibile in Q_i . Ne consegue che ogni elemento regolare in R possiede un inverso in Q .

Dal corollario al lemma 1 risulta che è $T(A_i) \subseteq A$, per $i \neq j$; dunque l'immagine isomorfa, $T(A_i)$, di $T(A_i)$ in $S = R/A_1 \oplus \cdots \oplus R/A_n$ è un ideale

diverso dallo (o) contenuto nell' i -esima componente di S , R/A_i . Essendo R/A_i primo ed essendo $\overline{T(A_i)}$ un ideale di R/A_i , $\overline{T(A_i)}$ incontra ogni ideale sinistro di R/A_i ; pertanto, in virtù del lemma 4 del Procesi, $\overline{T(A_i)}$ ha un elemento regolare rispetto all' R/A_i . Da questo segue facilmente che ogni elemento x di Q può mettersi sotto la forma $x = a^{-1}b$, dove a, b sono elementi di R ed a è regolare in R , il che completa la nostra dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. W. GOLDIE, *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, « Proc. London Math. Soc. », vol. 8, pp. 589–608 (1958).
- [2] A. W. GOLDIE, *Semi-prime rings with maximum conditions*, « Proc. London Math. Soc. », vol. 10, pp. 201–220 (1960).
- [3] C. PROCESI, *Sulla struttura degli anelli primi verificanti una condizione di massimo*, in corso di stampa in questi « Rendiconti ».