Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Samuel Zaidman

Un teorema di esistenza per un problema non bene posto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.1-2, p. 17–22.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_17_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Analisi matematica. — *Un teorema di esistenza per un problema non bene posto* [(*)]. Nota [(**)] di SAMUEL ZAIDMAN, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

1. Diamo un teorema di esistenza per una equazione differenziale operazionale del primo ordine, per la quale il problema di Cauchy è bene posto solo per $t > t_0$, ma c'è tuttavia unicità retrograda. Tale teorema serve come base nei teoremi di quasi periodicità per le equazioni paraboliche non omogenee.

2. Si considerano, seguendo Lions [1], due spazi di Hilbert V e H, separabili. È supposto che $V \subset H$, algebricamente e con immersione continua. In più, V è denso in H.

Si dà poi una forma sesquilineare continua su V (dipendente dal parametro $t \in J = (-\infty, +\infty)$) $a(t, u, v)$, e si fanno le seguenti ipotesi:

i) $a(t, u, v) = \overline{a(t, v, u)}$, $\forall\ t \in J,\ u \in V,\ v \in V$;

ii) $\exists\ \lambda, \alpha > 0$, tali che $a(t, u, u) + \lambda |u|_H^2 \geq \alpha \|u\|_V^2$;

iii) $a(t, u, v)$ è derivabile con continuità in $t \in J$, $\forall\ u, v \in V$.

Possiamo enunciare ora il seguente

TEOREMA. – *Supponiamo che valgano le ipotesi* i)–iii). *Data* $f(t) \in L^2_{loc}(J; H)$, *esiste almeno una funzione* $u(t)$ *con le seguenti proprietà:*

1° $u(t) \in L^2_{loc}(J; V)$, $u'(t) \in L^2_{loc}(J; H)$;

2° $a(t, u(t), v) + (u'(t), v)_H = (f(t), v)_H$, $\forall\ v \in V$,

quasi ovunque in $t \in J$.

La dimostrazione si fa attraverso successivi lemmi:

LEMMA 1. – *Per ogni* T *reale esiste una e una sola funzione* $u(t)$ *con le seguenti proprietà:*

3° $u(t) \in L^2(-T; T; V)$, $u'(t) \in L^2(-T; T; H)$, $u(-T) = 0$ in H;

4° $a(t, u(t), v) + (u'(t), v)_H = (f(t), v)_H$, $\forall\ v \in V$,

quasi ovunque in $t \in (-T, T)$;

$$(f(t) \textit{ è dato } \in L^2(-T; T; H)).$$

(Il lemma non è altro che il Théorème 6.1, Ch. IV di Lions [1]) [(1)].

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano, Gruppo di ricerche n. 12 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., anno 1962–1963.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1963.

(1) Cogliamo l'occasione per segnalare che usando il Ch. VII di [1], si può completare il Th. 6.1. Ch. IV di [1] per arbitrarie condizioni iniziali $\neq 0, \in V$. Inoltre, V, come spazio di condizioni iniziali per soluzioni di 4° con le prime due condizioni di 3° è il più grande possibile, e quindi la risposta al « Problème » di [1] pag. 69 è *negativa*.

Definizione 1. – Chiamiamo F_T l'insieme delle funzioni $u(t)$ con le seguenti proprietà:

$$5^\circ \quad u(t) \in L^2(-T, T; V), \ u'(t) \in L^2(-T, T; H);$$

$$6^\circ \quad a(t, u(t), v) + (u'(t), v)_H = 0, \ \forall v \in V,$$

quasi–ovunque in $-T < t < T$.

LEMMA 2. – *Presi ad arbitrio tre numeri positivi* $T_1 < T_2 < T_3$, *l'insieme* F_{T_3} *è denso in* F_{T_2}, *nella topologia* $L^2(-T_1, T_1; H)$.

Un risultato analogo è esposto da Malgrange [2] e P. Lax [3]. Per la dimostrazione si usa il teorema di Hahn–Banach. Sia dunque una funzione

$$h(t) \in L^2(-T_1, T_1; H),$$

tale che sia

$$\int_{-T_1}^{T_1} (h(t), u(t))_H \, dt = 0 \quad , \quad \forall u(t) \in F_{T_3}$$

Dimostriamo che segue:

$$\int_{-T_1}^{T_1} (h(t), u(t))_H \, dt = 0 \quad , \quad \forall u(t) \in F_{T_2}.$$

Sia

$$h_0(t) = \begin{cases} h(t), & \text{per } -T_1 \leq t \leq T_1 \\ 0, & \text{per } -T_3 \leq t < -T_1, T_1 < t \leq T_3; \end{cases} \quad \text{è: } h_0(t) \in L^2(-T_3, T_3, H).$$

Per il teorema 6.1 (Ch. IV) di Lions [1], si ottiene (cambiando il senso del tempo), che

$$\exists U(t) \in L^2(-T_3, T_3; V) \ , \ U'(t) \in L^2(-T_3, T_3; H) \ , \ U(T_3) = 0,$$

$a(t; U(t) v) - (U', v)_H = (h_0, v)_H$, $\forall v \in V$, quasi–ovunque per $-T_3 \leq t \leq$ $\leq T_3$. Dato che $h_0 = 0$ per $T_1 < t \leq T_3$ (e per l'unicità nel T. 6.1 di [1]) risulta che:

$$U(t) = 0 \qquad \text{per} \quad T_1 \leq t \leq T_3.$$

Vedremo ora, che anche $U(-T_3) = 0$, donde, usando l'unicità retrograda (Lions–Malgrange [4]) si otterrà che $U(t) = 0$ per $-T_3 \leq t \leq -T_1$.

Ricordiamo dapprima che la forma $a(t, u, v)$ definisce una famiglia di operatori $A(t)$, mediante la relazione:

$$a(t, u, v) = (A(t) u, v)_H, \ \forall u \in D_{A(t)}, \ \forall v \in V \ (\text{e anche } v \in H),$$

che è valida per $u \in D_{A(t)} = \{u \in V, |a(t, u, v)| \leq c_{t,u} |v|_H\}$.

È noto (Lions [1]) come dalle relazioni i) e ii), risulta che $A(t) = A^*(t)$, $\forall t \in J$, e $D_{A(t)}$ è denso in H, $\forall t \in J$.

Osserviamo ora che, dato u_0 ad arbitrio in $D_{A(0)}$ (2), si può costruire una funzione $U^*(t)$ con le seguenti proprietà:

$$U^*(t) \in L^2(-T_3, T_3, V), U_t^*(t) \in L^2(-T_3, T_3; H), U^*(-T_3) = u_0,$$

$$a(t, U^*, v) + (U_t^*, v) = 0, \forall v \in V, \text{ quasi-ovunque in } (-T_3, T_3).$$

(Per la possibilità di tale costruzione Cfr. Lions [1], pp. 95–96).

Ricordiamo pure che se $v(t) \in L^2(a, b; V)$, $v' \in L^2(a, b; H)$, e $a(t, v(t), \nu) + (v', \nu)_H = (f(t), \nu)_H$, $\forall \nu \in V$, quasi-ovunque in (a, b), con $f(t)$ assegnato in $L^2(a, b; H)$ allora risulta $v(t) \in D_{A(t)}$ quasi-ovunque in (a, b), e $A(t)v(t) + v'(t) = f(t)$ quasi ovunque in (a, b), $A(t)v(t) \in L^2(a, b; H)$. Osserviamo ancora che per la definizione di U^*, si ha $U^* \in F_{T_3}$.

Risulta inoltre:

$$\int_{-T_3}^{T_3} (U(t), U_t^*(t) + A(t)U^*(t))_H \, dt - \int_{-T_3}^{T_3} (-U_t(t) + A(t)U(t), U^*(t))_H \, dt = 0,$$

dato che $U_t^* + A(t)U^* = 0$, $-U_t + A(t)U(t) = h_0$, $U^* \in F_3$, e per ipotesi

$$\int_{-T_3}^{T_3} (h_0, U^*)_H \, dt = 0.$$

D'altra parte, essendo $A(t) = A^*(t)$, la nostra espressione diventa ancora uguale a

$$\int_{-T_3}^{T_3} ((U, U_t^*)_H + (U_t, U^*)_H) dt = (U(T_3), U^*(T_3))_H - (U(-T_3), U^*(-T_3))_H = 0.$$

Ma poiché $U(\cdot T_3) = 0$, resta soltanto $0 = (U(-T_3), U^*(-T_3))_H = (U(-T_3), u_0)_H$, $\forall u_0 \in D_{A(0)}$, che è denso in H. Donde si ha $U(-T_3) = 0$.

Inoltre, nell'intervallo $-T_3 < t < -T_1$, la funzione U soddisfa l'equazione

$$a(t, U, v) - (U', v) = 0, \forall v \in V, \text{ quasi-ovunque in } t,$$

e

$$U \in L^2(-T_3, -T_1; V), U' \in L^2(-T_3 - T_1; H).$$

Perciò siamo in grado di applicare il teorema 1.1 (di unicità retrograda) di Lions–Malgrande [4] (dopo aver cambiato il senso del tempo), e ricaviamo che $U = 0$ per $-T_3 \leq t \leq -T_1$.

Possiamo ora finire la dimostrazione del lemma. Prendiamo ad arbitrio una funzione $\gamma_0(t) \in F_{T_2}$ e dimostriamo che $\int_{-T_1}^{T_1} (\gamma_0(t), h(t)) \, dt = 0$. Prendiamo

(2) E anche per $u_0 \in V$ (cfr. la nota (1) della pag. 1).

a tale scopo un T^* compreso fra T_1 e T_2; si ha

$$\int_{-T_1}^{T_1} (\gamma_0 , h)_H \, dt = \int_{-T^*}^{T^*} (\gamma_0 , h_0)_H \, dt = \int_{-T^*}^{T^*} (\gamma_0 ; A(t) U - U')_H \, dt =$$

$$\int_{-T^*}^{T^*} (\gamma'_0 + A(t) \gamma_0 , U)_H \, dt = 0$$

(abbiamo usato, integrando per parti, il fatto che $U(T^*) = U(-T^*) = 0$, e che $\gamma'_0 + A(t)\gamma_0 = 0$ quasi–ovunque in $(-T_2 , T_2)$, dato che $\gamma_0(t) \in F_{T_2}$).

LEMMA 3. – *Sia* $f(t) \in L^2_{loc}(J ; H)$, *e supponiamo che la funzione* $u(t) \in L^2_{loc}(J ; H)$ *soddisfi l'equazione*

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) , \varphi'(t))_H \, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) , A(t) \varphi(t))_H \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) , \varphi(t))_H \, dt$$

per ogni $\varphi(t)$ *con supporto compatto in* J, *e con le seguenti proprietà:*

$\varphi(t) \in L^2_{loc}(J ; H)$, $\varphi'(t) \in L^2_{loc}(J ; H)$, $\varphi(t) \in D_{A(t)}$ *quasi–ovunque in* J *e* $A(t)\varphi(t) \in L^2_{loc}(J ; H)$.

Risulta che: $u(t) \in L^2_{loc}(J ; V)$, $u'(t) \in L^2_{loc}(J ; H)$, $u(t) \in D_{A(t)}$ *quasi ovunque in* J, $u'(t) + A(t) u(t) = f(t)$ *quasi–ovunque in* J.

Dimostrazione. – Sia $\zeta(t)$ una funzione scalare di C^∞, $\zeta(t) = 0$ per $t < -T + \delta$, $\zeta(t) = 1$ per $t > -T + 2\delta$, e $\varphi(t)$ presa ad arbitro e tale che risulti:

$\varphi \in L^2_{loc}(-T , \infty ; H)$, $\varphi' \in L^2_{loc}(-T , \infty ; H)$, $\varphi(t) = 0$ per $t \geq T$, $\varphi(t) \in D_{A(t)}$ quasi–ovunque, $A(t)\varphi(t) \in L^2_{loc}(-T , \infty ; H)$.

Allora la funzione $\zeta(t)\varphi(t)$ soddisfa le medesime condizioni da $-\infty$ a $+\infty$, ed in più è con supporto compatto $\subset (-T + \delta , T)$.

Vale quindi per ipotesi la relazione

$$-\int_{-\infty}^{\infty} (u(t) , \zeta' \varphi + \zeta\varphi')_H \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} (u(t) , \zeta(t) , A(t) \varphi(t))_H \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) , \zeta\varphi)_H \, dt$$

oppure

$$-\int_{-T}^{T} (u(t) \zeta(t) , \varphi')_H \, dt + \int_{-T}^{T} (u(t) , \zeta(t) A(t) \varphi(t))_H \, dt = \int_{-T}^{T} (\zeta(t) f(t) + \zeta' u(t) , \varphi)_H \, dt$$

$\forall$ $\varphi \in L^2(-T , T ; H)$, con $\varphi' \in L^2(-T , T ; H)$, $A(t)\varphi(t) \in L^2(-T , T ; H)$, $\varphi(T) = 0$.

Osserviamo ora che $\zeta(t) f(t) + \zeta'(t) u(t) \in L^2(-T , T ; H)$.

Allora, esiste, per il lemma 1°, una funzione $w(t) \in L^2(-T , T ; V)$ con $w'(t) \in L^2(-T , T ; H)$, $w(-T) = 0$, e $w'(t) + A(t) w(t) = \zeta(t) f(t) + \zeta'(t) u(t)$ quasi–ovunque in $(-T , T)$.

Presa ad arbitrio la funzione $\varphi(t) \in L^2(-T, T; H)$, $\varphi'(t) \in L^2(-T, T; H)$, $\varphi(t) \in D_{A(t)}$ quasi-ovunque, $A(t)\varphi(t) \in L^2(-T, T; H)$, $\varphi(T) = 0$, si ricava, tenendo conto che $w(-T) = 0$ e integrando per parti:

$$-\int_{-T}^{T} (w(t), \varphi'(t))\,dt + \int_{-T}^{T} (w(t), A(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-T}^{T} (f\zeta + u\zeta', \varphi)\,dt.$$

Donde la funzione $k(t) = w(t) - \zeta u$ soddisfa l'equazione

$$-\int_{-T}^{T} (k(t), \varphi'(t)\,dt + \int_{-T}^{T} (k(t), A(t)\varphi(t))\,dt = 0,$$

per ogni $\varphi \in L^2(-T, T; H)$, $\varphi' \in L^2(-T, T; H)$, $A(t)\varphi(t) \in L^2(-T, T; H)$, $\varphi(T) = 0$.

Per un teorema di unicità di Lions [1] – Th. 5.1, Ch. V], risulta che $k(t) = 0$ per $-T \leq t \leq T$, cioè $\zeta u = w$ in $(-T, T)$; quindi per la definizione di ζ, $u = w$ in $[-T + 2\delta, T]$. e $u \in L^2(-T + 2\delta, T; V)$, $u' \in L^2(-T + 2\delta, T; H)$, $u(t) \in D_{A(t)}$ quasi-ovunque, $A(t)\,u(t) \in L^2(-T + 2\delta, T; H)$.

Poiché T e δ sono arbitrari (con $\delta < T$ naturalmente), il lemma è dimostrato.

Diamo ora un secondo risultato di approssimazione, nel seguente

LEMMA 4. – *Presi ad arbitrio due numeri positivi* $T_1 < T_2$, *l'insieme delle funzioni* $u(t) \in L^2_{loc}(J; V)$, *con* $u'(t) \in L^2_{loc}(J; H)$, *tali che* $(u'(t), v)_H + a(t; u(t), v) = 0$, $\forall\, v \in V$, *quasi-ovunque in* J, *è denso nell'insieme* F_{T_2} (def. 1), *nella topologia* $L^2(-T_1, -T_1; H)$.

Siano dati $u_0(t) \in F_{T_2}$ e $\varepsilon > 0$. Per il lemma 2 esiste $u_1(t) \in F_{T_2+1}$ tale che sia

$$\int_{-T_2}^{T_1} |u_0(t) - u_1(t)|_H^2\,dt < \varepsilon^2/4\,.$$

Successivamente, esiste $u_2(t) \in F_{T_2+2}$, tale che risulti

$$\left\{\int_{-T_2}^{T_2} |u_2(t) - u_1(t)|_H^2\,dt\right\}^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2^2} \quad \text{e quindi} \quad \left\{\int_{-T_1}^{T_1} |u_2(t) - u_0(t)|_H^2\,dt\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} < \varepsilon$$

E così di seguito, costruiamo una successione di funzioni $u_i(t) \in F_{T_2+i}$, tali che:

$$\left\{\int_{-(T_2+i)}^{T_2+i} |u_{i+2} - u_{i+1}|_H^2\,dt\right\}^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}\,,$$

e quindi

$$\left\{\int_{-T_1}^{T_1} |u_{i+2} - u_0|_H^2\,dt\right\}^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} < \varepsilon\,.$$

Da queste disuguaglianze si deduce subito che esiste

$$\lim_{i \to \infty} u_i(t) = u_\varepsilon(t) \quad \text{in } L^2_{\text{loc}}(J\,;H),$$

e che

$$\int_{-T_1}^{T_1} |u_\varepsilon - u_0|_H^2\, dt < \varepsilon^2.$$

Inoltre, le funzioni $u_i(t) \in F_{T_2+i}$ soddisfano l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{(u_i, \varphi')_H + (u_i, A(t)\varphi)_H\}\, dt = 0,$$

$\forall\ \varphi \in L^2_{\text{loc}}(J\,;H)$, con $\varphi' \in L^2_{\text{loc}}(J\,;H)$, $A(t)\varphi \in L^2_{\text{loc}}(J\,;H)$, φ con supporto compatto $\subset (-(T_2+i), (T_2+i))$.

Se ne deduce che u_ε soddisfa la medesima equazione, per tutti gli φ come prima e con supporto compatto arbitrario in J.

Adesso si applica il lemma 3, il che dimostra il lemma 4.

Adesso possiamo finire la dimostrazione del teorema (vedasi [2]). Costruiamo, applicando sempre il lemma 1, una successione
$u_n(t) \in L^2(-n, n)\,;V)$, con $u'_n \in L^2(-n, n\,;H)$, $u(-n) = 0$, e $u'_n + A(t)\,u_n = f(t)$ quasi-ovunque in $(-n \leq t \leq n)$.

Consideriamo la serie

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots.$$

Alle funzioni $u_n - u_{n-1}$ applichiamo il lemma 4, e troviamo delle funzioni $h_n \in L^2_{\text{loc}}(J\,;V)$, con $h'_n \in L^2_{\text{loc}}(J\,;H)$, $h'_n + A(t)\,h_n = 0$ quasi-ovunque, e

$$\left\{\int_{-n+2}^{n-2} |u_n - u_{n-1} - h_{n-1}|_H^2\, dt\right\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Allora la serie

$$u_1 + (u_2 - u_1 - h_1) + \cdots (u_n - u_{n-1} - h_{n-1}) + \cdots$$

è convergente in $L^2_{\text{loc}}(J\,;H)$. La sua somma $u(t) \in L^2_{\text{loc}}(J\,;H)$ e soddisfa la equazione del lemma 3, e quindi il teorema.

BIBLIOGRAFIA.

[1] LIONS, *Equations différentielles opérationnelles*, Springer Verlag, 1961.
[2] MALGRANGE, *Operatori differenziali*, C.I.M.E., 1961.
[3] LAX, *A stability theorem . . .*, «Comm. Pure Appl. Math.», *9* (1956).
[4] LIONS-MALGRANGE, *Sur l'unicité rétrograde*, «Math. Scand.», *8*, 277-286 (1960).