Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Delfina Roux

Su una classe di funzioni intere con il minimo modulo quasi-asintotico al massimo modulo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **35** (1963), n.1-2, p. 12–16.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_35_1-2_12_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Su una classe di funzioni intere con il minimo modulo quasi–asintotico al massimo modulo* [(*)]. Nota [(**)] di DELFINA ROUX, presentata dal Corrisp. G. RICCI.

1. INTRODUZIONE. – Sia $f(z)$ una funzione intera della variabile complessa $z = re^{i\vartheta}$ e diciamo, secondo notazioni abituali, $n(r)$ il numero degli zeri di $f(z)$ appartenenti al cerchio $|z| \leqq r$ (si suppone $f(0) = 1$);

$$\mathrm{M}(r) = \max_{|z| \leqq r} |f(z)| \quad ; \quad m(r) = \min_{|z| = r} |f(z)| \quad ; \quad \mathrm{N}(r) = \int_0^r t^{-1}\, n(t)\, dt.$$

Fra il comportamento asintotico di $m(r)$ e quello di $\mathrm{M}(r)$ intercedono relazioni che sono, in generale, alquanto complesse: tuttavia, qualora $f(z)$ abbia ordine zero, esse diventano, in alcuni casi, particolarmente semplici.

Infatti, G. Valiron [(1)] ha dimostrato che

«*Da* $\log \mathrm{M}(r) = O((\log r)^2)$ *segue* $\log m(r) \sim \log \mathrm{M}(r)$» [(2)].

Inoltre, S. K. Singh e K. Manjanathaiah ([4], Teorema I) hanno dimostrato il seguente teorema [(3)]:

«*Sia* $\alpha > 1$ e $0 < c < 1$: *allora da* $(\log r)^{\alpha - c} < \log \mathrm{M}(r) < (\log r)^{\alpha}$ *segue* $\log \mathrm{M}(r) \sim \mathrm{N}(r)$».

D'altronde si ricava facilmente da proposizioni note che se $\log \mathrm{M}(r) \sim \mathrm{N}(r)$, è anche $\log m(r) \dot{\sim} \log \mathrm{M}(r)$ [(4)].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. (1962–63).

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1963.

(1) G. VALIRON [5]. Vedasi, per esempio, R. P. BOAS jr. [1], teorema 3.6.1, p. 50.

(2) Ricordiamo qui la definizione di quasi–asintoticità. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni della variabile reale x definite per $x \geqq x_0$. Si dice che $f(x)$ è *quasi–asintotica* a $g(x)$ per $x \to +\infty$ e si scrive $f(x) \dot{\sim} g(x)$ quando per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme dei valori x pei quali risulta

$$(1 - \varepsilon)\, g(x) < f(x) < (1 + \varepsilon)\, g(x) \tag{°}$$

ha densità lineare 1 sul semiasse $x > 0$; cioè quando per ogni $\varepsilon > 0$, detto $\mathrm{I}(\mathrm{X}, \varepsilon)$ l'insieme dei punti $x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$ pei quali vale la (°), risulta $m\,\mathrm{I}(\mathrm{X}, \varepsilon)/\mathrm{X} \to 1$ per $\mathrm{X} \to +\infty$. Per questa nozione e per altre più generali connesse con le funzioni aritmetiche vedasi G. RICCI [2].

(3) Questo teorema viene qui enunciato in una forma ovviamente equivalente, sebbene più semplice, a quella nella quale il teorema è formulato dagli Autori.

(4) Si veda, ad esempio, la dimostrazione della seconda parte del Teorema nel paragrafo 3.

Possiamo osservare che il teorema di Valiron non è contenuto nel teorema di Singh–Manjanathaiah: infatti la condizione $M(r) = O((\log r)^2)$ non implica che risulti necessariamente $\log M(r) > (\log r)^{1+\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$.

In questa Nota viene presentato un teorema che assegna una condizione sufficiente affinché risulti $\log m(r) \sim \log M(r)$: tale condizione contiene come casi particolari sia la condizione di Valiron sia la condizione di Singh–Manjanathaiah e risulta soddisfatta da una classe di funzioni più ampia di quella delle funzioni alle quali sono applicabili i teoremi sopra segnalati.

2. LA CLASSE $\mathcal{C}$. – Diciamo $\mathcal{C}$ la classe delle funzioni intere di genere zero per le quali esiste un numero k $(0 < k < 1)$ tale che risulti soddisfatta la condizione

$$\sup_{x \geqq r} \frac{n(x)}{x^k} = o\left(\frac{\log M(r)}{r^k}\right). \tag{2.1}$$

Osservazioni.

1° Da $f \in \mathcal{C}$ segue $\operatorname{ord} f = 0$.

Infatti, la (2.1) implica che sia $n(r) = O(r^k)$ e pertanto (essendo $f(z)$ un prodotto canonico) l'ordine di $f(z)$ soddisfa la limitazione $\operatorname{ord} f \leqq k$ (5). Inoltre, la (2.1) implica anche che sia $n(r) = o(\log M(r))$ e questa circostanza può verificarsi solamente se l'ordine di $f(z)$ è un numero intero (6). Ne segue allora (essendo $k < 1$) $\operatorname{ord} f = 0$.

2° Se risultano soddisfatte entrambe le condizioni

$$\log M(r) = O((\log r)^\alpha), \qquad \alpha < 1 \tag{2.2}$$

$$(\log r)^{\alpha-1} = o(\log M(r)) \tag{2.3}$$

allora $f(z) \in \mathcal{C}$.

Infatti, osserviamo preliminarmente che dalla (2.2) segue

$$\begin{aligned} n(r)\log r &= n(r)\int_r^{r^2} t^{-1}\,dt \leqq \int_0^{r^2} t^{-1}\,n(t)\,dt \\ &= N(r^2) \leqq \log M(r^2) = O((\log r^2)^\alpha) \\ &= O((\log r)^\alpha) \end{aligned}$$

e pertanto

$$n(r) = O((\log r)^\alpha/\log r) = O((\log r)^{\alpha-1}).$$

Allora, per ogni $r' \geqq r$ e per ogni $k > 0$ risulta

$$\frac{n(r')}{r'^k}\cdot\frac{r^k}{\log M(r)} \leqq A\,\frac{(\log r')^{\alpha-1}}{r'^k}\cdot\frac{r^k}{(\log r)^{\alpha-1}}\cdot\frac{(\log r)^{\alpha-1}}{\log M(r)} =$$

$$= A\left(\frac{\log(r'/r)+\log r}{(r'/r)^{k/(\alpha-1)}\log r}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{(\log r)^{\alpha-1}}{\log M(r)} < B\,(\log r)^{\alpha-1}/\log M(r) \to 0$$

in forza della (2.3). Ne segue che $f(z) \in \mathcal{C}$.

(5) Vedasi ad esempio R. P. BOAS jr. [1], teorema 2.6.5, p. 12.
(6) Vedasi ad esempio R. P. BOAS jr. [1], teorema 2.9.4, p. 24.

3° Le funzioni $f(z)$ soddisfacenti la condizione di Valiron $\log M(r) = O((\log r)^2)$ appartengono alla famiglia $\mathcal{C}$.

Infatti, se $f(z)$ è un polinomio, l'affermazione è evidente. Se $f(z)$ non è un polinomio, si ha ovviamente $\log r = o(\log M(r))$ e pertanto $f(z)$ soddisfa le condizioni (2.2) e (2.3) per $\alpha = 2$.

4° Se esistono $\alpha > 1$ e c, $0 < c < 1$, tali che $(\log r)^{\alpha - c} < \log M(r) < (\log r)^{\alpha}$, le (2.2) e (2.3) sono evidentemente soddisfatte e pertanto, se $f(z)$ soddisfa la condizione di Singh–Manjanathaiah, $f(z) \in \mathcal{C}$.

5° Se $n(r)$ è lentamente oscillante (cioè se $n(cr) \sim n(r)$ per ogni $c > 0$ e per $r \to +\infty$), $f(z) \in \mathcal{C}$.

Infatti, per ogni $c > 1$ si ha

$$\log M(r) \geqq N(r) \geqq \int_{r/c}^{r} t^{-1}\, n(t)\, dt \geqq n(r/c) \int_{r/c}^{r} t^{-1}\, dt = n(r/c) \log c$$

e di conseguenza

$$\frac{n(r)}{\log M(r)} \leqq \frac{n(r)}{n(r/c) \log c} \to \frac{1}{\log c}$$

per $r \to +\infty$. Ne segue, per l'arbitrarietà di c,

$$n(r)/\log M(r) \to 0 \quad \text{per} \quad r \to +\infty. \tag{2.4}$$

Sia ora $r' \geqq r$ e diciamo h il numero intero per il quale risulta

$$2^{h-1} r \leqq r' < 2^h r,$$

cioè

$$h = [\log (r'/r)/\log 2] + 1.$$

Per ogni $\delta > 0$ esiste $r_0 = r_0(\delta)$ tale che per $r \geqq r_0$ risulti $n(2r) \leqq 2^{\delta} n(r)$. Avremo allora, per ogni $r' \geqq r$ e per ogni $r \geqq r_0(\delta)$:

$$n(r') \leqq n(2^h r) \leqq 2^{\delta} n(2^{h-1} r) \leqq 2^{2\delta} n(2^{h-2} r) \leqq \cdots \leqq 2^{h\delta} n(r).$$

Pertanto, per ogni $r' \geqq r$ e per ogni $r \geqq r_0(\delta)$ risulta, qualunque sia $k > 0$,

$$\frac{n(r')}{r'^{k}} \cdot \frac{r^k}{\log M(r)} \leqq \frac{2^{h\delta} n(r)}{2^{(h-1)k} r^k} \cdot \frac{r^k}{\log M(r)} = 2^{h(\delta - k) + k} \cdot \frac{n(r)}{\log M(r)}.$$

Scegliamo $\delta < k$: sarà allora, per ogni $r' \geqq r$ e per ogni $r \geqq \bar{r}$ (abbastanza grande)

$$\frac{n(r')}{r'^{k}} \cdot \frac{r^k}{\log M(r)} \leqq 2^k \frac{n(r)}{\log M(r)} \to 0$$

per $r \to +\infty$ in forza della (2.4) e pertanto $f(z) \in \mathcal{C}$.

3. Il risultato. – Veniamo ora al Teorema oggetto di questa Nota.

Teorema. – *Da* $f(z) \in \mathcal{C}$ *segue* $\log M(r) \sim N(r)$, $\log m(r) \sim \log M(r)$.

Osservazione. – Questo teorema contiene come casi particolari i teoremi di G. Valiron e S. K. Singh–K. Manjanathaiah (vedasi n. 2, osservazioni 3ª e 4ª).

Dimostrazione. – *a*) Da $f(z) \in \mathcal{C}$ segue $\log M(r) \sim N(r)$.

È noto [7] che per ogni r risulta

$$N(r) \leqq \log M(r) \leqq N(r) + Q(r)$$

dove

$$Q(r) = r \int_r^\infty t^{-2} n(t)\, dt.$$

Basterà quindi dimostrare che

$$Q(r)/\log M(r) \to 0 \quad \text{per} \quad r \to +\infty.$$

Infatti

$$\begin{aligned} Q(r) &\leqq r \int_r^\infty t^{k-2} \operatorname*{Sup}_{x \geqq r} (x^{-k} n(x))\, dt \\ &\leqq r \operatorname*{Sup}_{x \geqq r} (x^{-k} n(x)) \int_r^\infty t^{k-2}\, dt \\ &\leqq r^k \operatorname*{Sup}_{x \geqq r} (x^{-k} n(x))/(1-k) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{Q(r)}{\log M(r)} \leqq \frac{1}{1-k} \operatorname*{Sup}_{x \geqq r} \frac{n(x)}{x^k} \cdot \frac{r^k}{\log M(r)} \to 0$$

per $r \to +\infty$, poiché $f(z) \in \mathcal{C}$.

b) Da $f(z) \in \mathcal{C}$ segue $\log m(r) \stackrel{\cdot}{\sim} \log M(r)$.

Infatti, per qualunque funzione intera $f(z)$, comunque sia fissata una funzione $\Delta(r)$ divergente a $+\infty$ per $r \to +\infty$ (lentamente quanto si vuole) risulta [8]

$$\log m(r) \geqq N(r) - \Delta(r) Q(r)$$

ad eccezione di un insieme di valori r di densità lineare zero.

Poiché abbiamo dimostrato che, se $f(z) \in \mathcal{C}$, risulta $Q(r) = o(\log M(r))$, sarà possibile scegliere $\Delta(r)$ tendente a $+\infty$ abbastanza lentamente in modo che risulti anche $\Delta(r) Q(r) = o(\log M(r))$. Avremo allora

$$1 \geqq \frac{\log m(r)}{\log M(r)} \geqq \frac{N(r)}{\log M(r)} + o(1)$$

ad eccezione di un insieme di valori r di densità lineare nulla.

Ne segue, essendo $\log M(r) \sim N(r)$,

$$\log m(r) \stackrel{\cdot}{\sim} \log M(r).$$

(7) Vedasi ad esempio R. P. BOAS jr. [1], Lemma 3.5.1, p. 47.

(8) R. P. BOAS jr. [1], p. 49. Vedasi anche per qualche precisazione D. ROUX [3], p. 230.

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. P. BOAS jr., *Entire Functions*, New York 1954.

[2] G. RICCI, *Funzioni aritmetiche e quasi-asintoticità*, « Rend. Sem. Mat. Fis., Milano », *24*, pp. 88–106 (1952–53).

[3] D. ROUX, *Sul minimo modulo delle funzioni intere di genere zero*, « Riv. Mat. Univ. Parma », *8*, pp. 227–250 (1957).

[4] S. K. SINGH–K. MANJANATHAIAH, *On the growth of a class of entire functions*, « İstambul Üniv. Fen Fak. Mec. », Ser. A, *26*, pp. 9–13 (1961).

[5] G. VALIRON, *Lectures on the general theory of integral functions*, Toulouse 1923.