Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Grioli

Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.6, p. 636–641.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_6_636_0¿

Meccanica. — *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi.* Nota di GIUSEPPE GRIOLI, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

La ricerca e determinazione di soluzioni nel difficile problema dinamico del corpo rigido – che oggi presenta interesse attuale, se non altro, in relazione a questioni che si presentano nella teoria del moto attorno al baricentro, sotto speciali sollecitazioni, dei satelliti artificiali – riesce indubbiamente più facile – e più espressivi i risultati – se è nota a priori una caratterizzazione geometrico–cinematica della classe dei moti che si tratta di determinare.

Mi è sembrato pertanto di un certo interesse, indipendentemente da possibili applicazioni alla dinamica ma avendone di mira talune, mostrare la possibilità di stabilire alcuni teoremi di cinematica in riguardo a speciali moti rigidi che, per naturale estensione di un caso ben noto, possono dirsi *precessioni generalizzate* e dei quali esistono esempi in casi dinamici fisicamente interessanti.

1. MOTI DI PRECESSIONE GENERALIZZATA. – Sia $O\,\boldsymbol{i}_1\,\boldsymbol{i}_2\,\boldsymbol{i}_3$ una terna solidale al corpo rigido e p_1, p_2, p_3 le componenti rispetto ad essa della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Detta ε un'omografia rappresentata dalla matrice $|\varepsilon_{rs}|$ di ordine 3 ad elementi indipendenti dal tempo, si consideri il vettore $\mathbf{Q}$, trasformato di $\boldsymbol{\omega}$ mediante ε,

$$\mathbf{Q} = \varepsilon\boldsymbol{\omega} = \sum_{r,s} \varepsilon_{rs}\, p_s\, \boldsymbol{i}_r . \tag{1}$$

Supposto che il moto non sia rotatorio intorno all'asse di versore $\boldsymbol{i}_3$ invariabile nello spazio $[p_1^2 + p_2^2 \neq 0]$ e che una almeno delle ε_{rs} per $r = 1, 2$ non sia nulla, in modo che il vettore $\mathbf{Q}$ non sia, per $\boldsymbol{\omega}$ generico, parallelo ad $\boldsymbol{i}_3$, si ponga

$$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1 + p_3(Q_1^2 + Q_2^2)}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}, \\ F &= \frac{p_1 Q_2 - p_2 Q_1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ove il punto denota derivazione rispetto al tempo.

Dirò che un moto rigido è una *precessione generalizzata di vettore* $\mathbf{Q}$ quando e solo quando durante il moto il vettore $\mathbf{Q}$ si mantiene parallelo alla giacitura individuata da una direzione solidale al corpo e da una fissa nello spazio. La denominazione si può ritenere giustificata dal fatto che quando l'omografia ε si riduce all'identità e (conseguentemente) il vettore $\mathbf{Q}$ coincide con $\boldsymbol{\omega}$ si ricade nel caso dei moti di precessione.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1963.

Sussiste il

TEOREMA I: *condizione necessaria e sufficiente affinché il moto rigido sia una precessione generalizzata di vettore* $\mathbf{Q}$ *è che esista una funzione* $\theta(t)$ *per la quale sussistono le uguaglianze*

$$\text{(3)} \qquad D = (p_1 Q_1 + p_2 Q_2) \operatorname{ctg} \theta; \qquad \dot{\theta} = F.$$

La condizione è necessaria. Siano $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{i}_3$ i versori, invariabile nello spazio il primo nel corpo il secondo, che individuano la giacitura a cui è parallelo, per ipotesi, il vettore $\mathbf{Q}$. Risulta

$$\text{(4)} \qquad \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{i}_3 \times \mathbf{Q} = 0.$$

Da (4), dette c_i le componenti di $\boldsymbol{c}$ rispetto agli assi solidali, si ha, esplicitamente,

$$\text{(5)} \qquad Q_1 c_2 - Q_2 c_1 = 0,$$

oltre a

$$\text{(6)} \qquad \dot{Q}_1 c_2 - \dot{Q}_2 c_1 + Q_1 \dot{c}_2 - Q_2 \dot{c}_1 = 0.$$

Posto $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{i}_3 = \cos\theta$, l'invariabilità di $\boldsymbol{c}$ è espressa dalle equazioni

$$\text{(7)} \qquad \dot{c}_1 + p_2 \cos\theta - p_3 c_2 = 0 \quad , \quad \dot{c}_2 + p_3 c_1 - p_1 \cos\theta = 0,$$
$$\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta + p_2 c_1 - p_1 c_2 = 0.$$

Dall'essere $c_1^2 + c_2^2 = \sin^2\theta$ e da (5), trascurando un'inessenziale doppio segno, segue

$$\text{(8)} \qquad c_1 = \frac{Q_1 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} \quad , \quad c_2 = \frac{Q_2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} \quad , \quad [c_3 = \cos\theta].$$

Introducendo nella (6) le espressioni (8) di c_1, c_2 e quelle di $\dot{c}_1$, $\dot{c}_2$ dedotte da (7.1), (7.2), si ottiene la (3.1), mentre la (7.3) si traduce, in base a (8), nella (3.2).

La condizione é sufficiente. Supposta esistente una funzione $\theta(t)$ soddisfacente alle (3), si consideri il versore che rispetto agli assi solidali ha le componenti definite da (8). Esso verifica la (4).

Inoltre risulta, com'è facile riconoscere,

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} \times \boldsymbol{i}_r = (-1)^s \frac{(p_1 Q_1 + p_2 Q_2)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta D}{Q_1^2 + Q_2^2} Q_s + \cos\theta \left(\dot{\theta} + \frac{p_2 Q_1 - p_1 Q_2}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}\right) \frac{Q_r}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}, \\ &\hspace{22em} (r \neq s = 1, 2) \\ &\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} \times \boldsymbol{i}_3 = -\sin\theta \left(\dot{\theta} + \frac{p_2 Q_1 - p_1 Q_2}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Il vettore $\boldsymbol{c}$ definito da (8) è, pertanto, invariabile nello spazio in base a (3), e poiché esso verifica la (4), rimane dimostrata la sufficienza del Teorema I.

Naturalmente, è possibile tra le (3) eliminare θ. Basta derivare la (3.1) per dedurre come conseguenza

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{D}{p_1 Q_1 + p_2 Q_2}\right) + \left[1 + \frac{D^2}{(p_1 Q_1 + p_2 Q_2)^2}\right] F = 0, \tag{10}$$

relazione che dipende solo dalle componenti della velocità angolare.

È facile riconoscere che sono delle precessioni generalizzate le soluzioni della Fabbri [1] per il problema del solido pesante. Precisamente, in quei moti appartiene al piano dell'asse principale di versore $\boldsymbol{i}_3$ e della verticale per il punto fisso il vettore

$$\mathbf{Q} = \varepsilon\boldsymbol{\omega} = \rho\,[2\,\mathbf{K}_0 - C\boldsymbol{\omega} + \bar{\varepsilon} p_3 \boldsymbol{i}_3], \tag{11}$$

ove $\mathbf{K}_0$ è il momento delle quantità di moto rispetto ad O, C il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di versore $\boldsymbol{i}_3$, ρ e $\bar{\varepsilon}$ due costanti arbitrarie.

Sarebbe facile verificare che anche certe soluzioni che si presentano nel problema del moto attorno al baricentro in presenza di forze di Coriolis [2] sono delle precessioni generalizzate.

2. Casi particolarmente interessanti del Teorema I. – Uno speciale interesse presenta il Teorema I nel caso in cui la matrice $|\varepsilon_{rs}|$ si riduce alla identità [ε_{rs} = simboli di Kronecker]. In tal caso $\mathbf{Q}$ coincide con $\boldsymbol{\omega}$ e la condizione cinematica che caratterizza le precessioni generalizzate si riduce a quella ben nota valida per i moti di precessione [$\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{i}_3 = \text{cost}$].

Risulta ora $p_i = Q_i$ e la seconda delle (3) dà $\theta = \text{cost}$. Il Teorema precedente si traduce così nel

Corollario I: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un moto rigido sia un moto di precessione é che la velocità angolare verifichi la condizione*

$$\frac{p_1 \dot{p}_2 - p_2 \dot{p}_1 + p_3 (p_1^2 + p_2^2)}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}} = \text{cost} = \nu, \tag{12}$$

con ν *costante arbitraria.* L'asse di figura è parallelo a $\boldsymbol{i}_3$, quello di precessione ha il versore $\boldsymbol{c}$ definito da

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} + \left(\nu - \frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right)\boldsymbol{i}_3\right]. \tag{13}$$

Un secondo caso interessante si presenta facendo coincidere ε con l'omografia d'inerzia. In tal caso, se O è un punto fisso o coincide con il baricentro, $\varepsilon\,\boldsymbol{\omega}$ coincide con il momento delle quantità di moto rispetto ad O e dal Teorema I discende il seguente

(1) R. Fabbri, *Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIX (1934).

(2) G. Grioli, *Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXII, fasc. 4 (1957), [n. 4].

COROLLARIO II, che per brevità enuncio nel caso che gli assi solidali siano assi principali d'inerzia: *Condizione necessaria e sufficiente affinché durante il moto il momento delle quantità sia parallelo al piano di un asse principale per* O *di versore* $\boldsymbol{i}_3$ *e di una retta fissa* [*pure per* O] *dello spazio é che esista una funzione* $\theta(t)$ *per la quale siano verificate le relazioni*

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{AB\,(p_1 \dot{p}_2 - p_2 \dot{p}_1) + p_3\,(A^2 p_1^2 + B^2 p_2^2)}{(Ap_1^2 + Bp_2^2)\sqrt{A^2 p_1^2 + B^2 p_2^2}} = \operatorname{ctg}\theta\,, \\[2ex] \dfrac{(B - A)\,p_1 p_2}{\sqrt{A^2 p_1^2 + B^2 p_2^2}} = \dot{\theta}\,, \end{cases}$$

ove A *e* B *sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi* (*principali*) *di versori* $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$. Si osservi che se il solido ha struttura giroscopica attorno ad O [$A = B$] e solo allora, si ha $\dot{\theta} = 0$ mentre la (14.1) si riduce alla (12). Ciò vuol dire che se il solido ha struttura giroscopica intorno ad O, $\mathbf{K}_0$ appartiene al piano di $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{i}_3$ allora e solo allora che il moto sia una precessione con gli assi di figura e di precessione paralleli a $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{i}_3$.

Esempi di moti rigidi che sono delle precessioni generalizzate di vettore $\mathbf{K}_0$ sono già noti [3].

3. UN SECONDO TEOREMA DI CINEMATICA. – Fondandosi sul Teorema I è possibile stabilire un nuovo teorema di cinematica che può riuscire particolarmente utile per la ricerca di particolari soluzioni del problema dinamico. Si ponga

$$(15) \qquad \dot{\mu} = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - \dot{\theta}^2}}{\sin\theta}\,,$$

$$(16) \qquad f_1 = \cos\eta - \sin\eta \sin(\mu + e)\operatorname{ctg}\theta \quad , \quad f_2 = \frac{\sin\eta}{\sin\theta}\cos(\mu + e)\,,$$

$$f_3 = \cos\eta\cos\theta + \sin\eta\sin(\mu + e)\sin\theta\,,$$

ove θ è una funzione del tempo e η ed e due costanti. Sussiste il

TEOREMA II: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un moto rigido sia una precessione generalizzata é che ogni versore invariabile* $\boldsymbol{u}$ *sia rappresentabile nella forma*

$$(17) \qquad \boldsymbol{u} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}\left[(f_1 Q_1 + f_2 Q_2)\,\boldsymbol{i}_1 + (f_1 Q_2 - f_2 Q_1)\,\boldsymbol{i}_2\right] + f_3 \boldsymbol{i}_3\,,$$

con θ *verificante l'una o l'altra delle* (3).

La condizione é necessaria. Siano, al solito, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{i}_3$ i versori fisso e solidale della precessione generalizzata e θ il loro angolo. Ogni vettore unitario è rappresentabile nella forma [4]

$$(18) \qquad \boldsymbol{u} = (\cos\eta - a\cos\theta)\,\boldsymbol{c} + a\boldsymbol{i}_3 + \frac{\sqrt{\sin^2\eta - a^2\sin^2\theta}}{\sin\theta}\,\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{i}_3\,,$$

(3) G. GRIOLI, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione*, « Annali dell'Università di Ferrara », sez. VII, vol. III, N. 5 (1954), [nn. 2, 3].

(4) Anche ora si prescinde da un inessenziale doppio segno.

mentre si ha pure

$$\omega = \dot{\mu}\boldsymbol{c} + \dot{b}\boldsymbol{i}_3 + \frac{\dot{\theta}}{\sin\theta}\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{i}_3, \tag{19}$$

con $\dot{\mu}$ espresso da (15).

L'annullarsi di $d\boldsymbol{u}/dt$, in base a (18), (19), equivale all'equazione

$$\frac{\dot{a}}{\sqrt{\sin^2\eta - a^2\sin^2\theta}} + \frac{\dot{\theta}\cos\theta a}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\eta - a^2\sin\theta}} = \frac{\dot{\mu}}{\sin\theta} \tag{20}$$

che dà

$$a = \frac{\sin\eta}{\sin\theta}\sin(\mu + e), \qquad (e = \text{cost}). \tag{21}$$

Basta allora tener conto delle (8), verificate per ipotesi, perché la (18), in base a (16), (21), si traduca nella (17).

La condizione é sufficiente. Supposto $\boldsymbol{u}$ invariabile e valida una delle (3), con qualche sviluppo, si riconosce essere

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{i}_1 &= (f_1 Q_2 - f_2 Q_1)\,\xi_1 + f_3\frac{Q_1}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\,\xi_2 - \\ &\quad - [Q_1\cos\theta\cos(\mu+e) + Q_2\sin(\mu+e)]\frac{\sin\eta}{\sin\theta}\frac{\xi_3}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}, \\ \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{i}_2 &= (f_1 Q_1 + f_2 Q_2)\,\xi_1 + f_3\frac{Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}\,\xi_2 - \\ &\quad - [Q_2\cos\theta\cos(\mu+e) - Q_1\sin(\mu+e)]\frac{\sin\eta}{\sin\theta}\frac{\xi_3}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}, \\ \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{i}_3 &= f_1\sin\theta\xi_2 + \sin\eta\cos(\mu+e)\,\xi_3, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

ove, per brevità, si è posto

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= [\cos\theta\,(p_1 Q_1 + p_2 Q_2) - \sin\theta D]\frac{1}{(Q_1^2+Q_2^2)}, \\ \xi_2 &= \dot{\theta} + \frac{p_2 Q_1 - p_1 Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}, \\ \xi_3 &= \dot{\mu}\sin\theta - \frac{p_1 Q_1 + p_2 Q_2}{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Se vale la (3.2) è $\xi_2 = 0$. Di conseguenza, in base a (15), (23.3) risulta $\xi_3 = 0$ e da (22) segue $\xi_1 = 0$, cioè è verificata anche la (3.1).

Se vale invece la (3.1), dalle (22.1.2), per sottrazione dopo avere moltiplicata la prima per Q_2, la seconda per Q_1, si deduce l'annullarsi di ξ_3 e conseguentemente di ξ_2, cioè vale anche la (3.2). Il Teorema II è così dimostrato.

Nel caso particolare $\varepsilon = 1$ si ricade nei moti di precessione per i quali, pertanto, sussiste il seguente

COROLLARIO III: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un moto rigido sia un moto di precessione é che ogni versore invariabile* $\boldsymbol{u}$ *sia esprimibile* nella forma

$$\boldsymbol{u} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} [(f_1 p_1 + f_2 p_2) \boldsymbol{i}_1 + (f_1 p_2 - f_2 p_1) \boldsymbol{i}_2] + f_3 \boldsymbol{i}_3, \tag{24}$$

con θ *costante.*

Vale la pena di osservare che il Teorema II può enunciarsi anche nel seguente modo: *Se un moto rigido é una precessione generalizzata, condizione necessaria e sufficiente affinché un versore sia invariabile é che esso sia esprimibile nella forma* (17), *qualunque sia la* $\theta(t)$.