ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

Sulle caratteristiche di deformazione di una barra curva

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.6, p.
628–635.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_6_628_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sulle caratteristiche di deformazione di una barra curva.* Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

È ben noto che, per piccole trasformazioni di un sistema elastico tridimensionale, a partire da una configurazione di equilibrio spontaneo *non naturale*, il potenziale elastico *non* si presenta come una forma quadratica in sei variabili: le caratteristiche linearizzate di deformazione. La presenza di stress nella configurazione di riferimento fa comparire, nel potenziale elastico, dei termini contenenti la parte di secondo ordine delle caratteristiche di deformazione complete; sì che in definitiva il potenziale elastico viene a dipendere da tutte e nove le derivate delle componenti di spostamento, anziché da sei loro combinazioni lineari (cfr. [6] cap. V, in particolare il § 2, n. 6).

In modo del tutto analogo, per un solido tubolare schematizzabile in una linea a quattro parametri (barra), l'ordinario potenziale elastico va completato, almeno nel caso in cui la configurazione di riferimento non corrisponda ad uno *stato naturale*, coi termini contenenti la parte di 2° ordine delle caratteristiche di deformazione complete. Attesa l'importanza di questi termini, specie nelle questioni di stabilità, si riprende qui l'espressione (completa) delle caratteristiche di deformazione di una linea a quattro parametri per esplicitare la parte di 2° ordine nelle componenti di spostamento.

1. PREMESSE E GENERALITÀ. — Siano: l una curva regolare; P il suo punto generico; $\mathfrak{T} \equiv P \mathbf{b} \mathbf{t} \mathbf{n}$ il triedro principale in P costituito, nell'ordine, dalla binormale, tangente e normale principale alla linea l ; s l'ascissa curvilinea di P ; R e τ rispettivamente il raggio di curvatura e la torsione di l in P .

Ordinariamente una barra viene schematizzata in un solido tubolare per il quale le sezioni normali, oltre a rimanere indeformate, si conservino, in ogni trasformazione, ortogonali alla direttrice. La linea l , cioè la direttrice, non è pertanto sufficiente a rappresentare una barra in una data configurazione C_0 ; essa va completata associando, a ciascun suo punto, la cosiddetta *terna principale d'inerzia* della sezione corrispondente, terna che per semplicità qui si suppone, limitatamente almeno alla configurazione C_0 , coincidente con $\mathfrak{T}$ (1).

Il generico spostamento della barra (a partire da C_0) viene allora caratterizzato assegnando, accanto allo spostamento

$$(1) \quad \mathbf{W} = PP' = u\mathbf{b} + v\mathbf{t} + w\mathbf{n}$$

dei punti di l , la rotazione $\mathfrak{R}$ che determina l'orientamento della terna principale d'inerzia, $\mathfrak{T}'$ nella posizione finale.

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) Nel caso generale essa differisce da $\mathfrak{T}$ per una rotazione (da pensarsi assegnata insieme alla linea l) attorno alla tangente.

Lo spostamento $\mathbf{W}$ e la rotazione $\mathfrak{R}$ non sono però indipendenti, in quanto il vettore $\mathfrak{R}\mathbf{t}$ deve, sullo schema considerato, risultare tangente in P' alla curva l' trasformata di l ; deve essere cioè, indicato con $\mathbf{t}'$ il versore della tangente alla linea l' ,

$$(2) \quad \mathbf{t}' = \mathfrak{R}\mathbf{t}.$$

Il vincolo (2), come è naturale, riduce a quattro il numero dei parametri essenziali della barra. Precisamente, introdotto il *vettore caratteristico*, $\mathbf{q}(s)$ della rotazione $\mathfrak{R}$ (cfr. [7] p. 56) si ha da una parte, per il trasformato di $\mathbf{t}$,

$$(3) \quad \mathfrak{R}\mathbf{t} \equiv \mathbf{t} + \frac{2}{1+q^2}(\mathbf{q} \wedge \mathbf{t} - q^2 \mathbf{t} + \mathbf{q} \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{q});$$

dall'altra, come segue dalla (1) derivando rispetto ad s ed indicando con

$$(4) \quad e = \frac{ds'}{ds} - 1$$

il coefficiente di dilatazione lineare secondo la tangente $\mathbf{t}$,

$$(5) \quad \mathbf{t}' = \frac{1}{1+e} \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{W}}{ds} \right).$$

La (2) assume pertanto la forma esplicita

$$(2') \quad \frac{1}{1+e} \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{W}}{ds} \right) = \mathbf{t} + \frac{2}{1+q^2}(\mathbf{q} \wedge \mathbf{t} - q^2 \mathbf{t} + \mathbf{q} \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{q}).$$

Si vede bene di qui che, assegnati e e $\mathbf{q}$ in funzione di s , il vincolo imposto permette di determinare, con una quadratura, lo spostamento $\mathbf{W}$ dei punti di l , non appena sia noto lo spostamento di un punto della direttrice, ad esempio di uno degli estremi; ciò che suggerisce di assumere come parametri indipendenti e e $\mathbf{q}$. Ordinariamente invece, almeno per piccole trasformazioni, si pensano indipendenti lo spostamento $\mathbf{W}$ e la componente di $\mathbf{q}$ secondo $\mathbf{t}$ (cfr. [5] art. 289, [8] p. 239, e [3] pp. 384-90); ciò che è lecito anche per trasformazioni finite in quanto la (2') che, come equazione in $\mathbf{q}$ non può che ammettere ∞^1 soluzioni, dà quanto basta per determinare il componente di $\mathbf{q}$ normale a $\mathbf{t}$ (cfr. [2] pp. 720-21). Precisamente, decomposti i vettori $\mathbf{q}$ e $\mathbf{t}'$ secondo la direzione di $\mathbf{t}$ e la giacitura normale, posto cioè

$$(6) \quad 2\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \varphi \mathbf{t} \quad ; \quad \mathbf{t}' \equiv \frac{1}{1+e} \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{W}}{ds} \right) = \mathbf{v} + r\mathbf{t},$$

la (2') si traduce in [cfr. [2] formula (4'')]

$$(7) \quad \mathbf{q}_t = \frac{1}{1+r} (\varphi \mathbf{v} + 2\mathbf{t} \wedge \mathbf{v}),$$

esprimendo così [cfr. (6)₂] $\mathbf{q}_t$ in termini di φ e di spostamento $\mathbf{W}$.

Alla (7) si può dare forma più esplicita osservando che dalla (1), derivando rispetto ad s e applicando le formule di *Frenet*, si trae

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{W}}{ds} = \mathbf{N} + v_t \mathbf{t} \quad , \quad \mathbf{N} \equiv u_t \mathbf{b} + w_t \mathbf{n} ,$$

ove si è posto

$$(9) \quad u_i = \frac{du}{ds} - \tau w, \quad v_i = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{R}, \quad w_i = \frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} + \tau u.$$

Di qui segue [cfr. (6)₂]

$$(10) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{N}}{1+e}, \quad \mathbf{v} = \frac{1+v_i}{1+e},$$

in modo che la (7) si scrive

$$(7') \quad \mathbf{q}_i = \frac{1}{2+v_i+e} (2 \mathbf{t} \wedge \mathbf{N} + \varphi \mathbf{N}).$$

Per quanto riguarda il coefficiente di dilatazione lineare e si ha poi dalla (5), essendo $\mathbf{t}' \times \mathbf{t}' = 1$,

$$(1+e)^2 = 1 + 2 \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{W}}{ds} + \left(\frac{d\mathbf{W}}{ds} \right)^2,$$

ovvero

$$(11) \quad 1+e = \sqrt{1+2E},$$

avendo posto [cfr. (8)₁]

$$(12) \quad E = v_i + \frac{1}{2}(\varphi_i^2 + N^2).$$

Si ha così quanto basta per esprimere esattamente $\mathbf{q}$ ed e , cioè in sostanza tutti gli elementi dello spostamento della barra, mediante i quattro parametri essenziali u, v, w, φ .

In particolare si possono ricavare, in funzione di questi ultimi, le caratteristiche di deformazione e ed $\boldsymbol{\varepsilon} = 2 \frac{d\mathbf{q}}{ds}$ che, col loro annullarsi, caratterizzano (cfr. [2] p. 721) *gli spostamenti rigidi della barra*. Così pure le caratteristiche di deformazione tradizionali (cfr. [5] art. 253 e [1] n. 2) $e, \kappa_i - \kappa'_0, \tau_i - \tau'_0, \kappa_i - \kappa_0$ che, come ho accertato (cfr. [2] n. 2), danno anche le componenti, secondo la terna trasformata $\mathcal{C}'$, del vettore (in corrispondenza biunivoca con $\boldsymbol{\varepsilon}$)

$$(13) \quad \boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{1+e^2} (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{q} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Come si vede di qui tutto è ricondotto al calcolo di $\boldsymbol{\varepsilon} = 2 \frac{d\mathbf{q}}{ds}$ in funzione di u, v, w, φ . Riservandoci di calcolare la parte di 2° ordine di $\boldsymbol{\Psi}$ al prossimo numero, si noti che l'espressione completa di $\boldsymbol{\varepsilon}$ è la seguente [cfr. (6) e (7')]:

$$(14) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{t} + \frac{\varphi}{R} \mathbf{n} + \frac{1}{2+v_i+e} \left[2 \frac{\mathbf{n}}{R} \wedge \mathbf{N} + 2 \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{N} + \varphi \frac{d\mathbf{N}}{ds} - \frac{1}{2+v_i+e} \left(\frac{dv_i}{ds} + \frac{de}{ds} \right) (2 \mathbf{t} \wedge \mathbf{N} + \varphi \mathbf{N}) \right].$$

2. CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE IN 2^a APPROSSIMAZIONE. — Limitandoci a mettere in evidenza i termini fino al 2° ordine incluso in u, v, w, φ e derivate, dalle (11) e (12) si trae

$$(15) \quad e = E - \frac{1}{2} E^2 + \dots = e^{(1)} + e^{(2)} + \dots,$$

con

$$(15 a) \quad e^{(1)} = v_1 \equiv \frac{dv}{ds} - \frac{w}{R}$$

termine del 1° ordine e

$$(15 b) \quad e^{(2)} = \frac{1}{2} (u_1^2 + w_1^2) \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{ds} - \tau w \right)^2 + \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} + \tau u \right)^2 \right] \quad (2)$$

termine di 2° ordine.

Insieme si ha

$$\frac{1}{1 + \frac{v_1 + e}{2}} = 1 - \frac{v_1 + e}{2} + \dots = 1 - v_1 + \dots;$$

ciò che riduce la (7') alla forma

$$(16) \quad \mathbf{q}_1 = (1 - v_1) \mathbf{t} \wedge \mathbf{N} + \frac{1}{2} \varphi \mathbf{N} + \dots$$

Al tempo stesso la (14) si precisa in

$$(17) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{t} + \frac{\varphi}{R} \mathbf{n} + (1 - v_1) \left(\frac{\mathbf{n}}{R} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{N}}{ds} \right) - \frac{dv_1}{ds} \mathbf{t} \wedge \mathbf{N} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \mathbf{N} + \varphi \frac{d\mathbf{N}}{ds} \right) + \dots \end{aligned}$$

e quindi, in termini di componenti secondo $\mathcal{C}$ [cfr. (9)]

$$(17') \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1 - v_1) \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) - w_1 \frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{2} u_1 \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right) + \dots \\ \varepsilon_2 &= \frac{d\varphi}{ds} + \frac{u_1}{R} (1 - v_1) - \frac{1}{2} \frac{\varphi}{R} w_1 + \dots \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varphi}{R} - (1 - v_1) \left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right) + u_1 \frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{2} w_1 \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Passando ora al vettore $\boldsymbol{\Psi}$, cominciamo con l'osservare che la (13) si scrive, in 2^a approssimazione,

$$(18) \quad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{q} \wedge \boldsymbol{\varepsilon} + \dots = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} (\varphi \mathbf{t} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}) \wedge \boldsymbol{\varepsilon} + \dots$$

(2) Per il caso $\tau = 0$ si confronti [4], formula (12 a).

e quindi, proiettando su $\mathfrak{T}$,

$$(18') \quad \begin{cases} \psi_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varphi \varepsilon_3 + \frac{1}{2} u_1 \varepsilon_2 + \dots \\ \psi_2 = \varepsilon_2 - \frac{1}{2} u_1 \varepsilon_1 - \frac{1}{2} w_1 \varepsilon_3 + \dots \\ \psi_3 = \varepsilon_3 + \frac{1}{2} w_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varphi \varepsilon_1 + \dots \end{cases}$$

Per determinare a questo punto le caratteristiche ordinarie di deformazione nell'approssimazione richiesta, basta calcolare le componenti di Ψ secondo la terna trasformata di $\mathfrak{T}$ mediante il rotore $\mathfrak{R}$. Per quest'ultimo basta poi considerare l'espressione linearizzata, dato che le (18') sono di per sè quantità del 1° ordine; si può supporre cioè [cfr. (3)]

$$\mathfrak{R} = 1 + 2 \mathbf{q} \wedge$$

essendo [cfr. (6)_i e (16)] $2 \mathbf{q} = \varphi \mathbf{t} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}$.

Si ottiene così

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} \mathbf{b} &= \mathbf{b} - u_1 \mathbf{t} - \varphi \mathbf{n} + \dots, & \mathfrak{R} \mathbf{t} &= u_1 \mathbf{b} + \mathbf{t} + w_1 \mathbf{n} + \dots, \\ \mathfrak{R} \mathbf{n} &= \varphi \mathbf{b} - w_1 \mathbf{t} + \mathbf{n} + \dots \end{aligned}$$

e quindi in definitiva

$$\begin{cases} \kappa_w \equiv \kappa'_1 - \kappa'_0 = \psi_1 - u_1 \psi_2 - \varphi \psi_3 + \dots \\ \kappa_\varphi \equiv \tau_1 - \tau_0 = \psi_2 + w_1 \psi_3 + u_1 \psi_1 + \dots \\ \kappa_u \equiv \kappa_1 - \kappa_0 = \psi_3 + \varphi \psi_1 - w_1 \psi_2 + \dots \end{cases}$$

ovvero [cfr. (17') e (18')]

$$(19) \quad \begin{cases} \kappa_w = \varepsilon_1 - \frac{1}{2} u_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varphi \varepsilon_3 + \dots = \varepsilon_1 - \frac{1}{2} u_1 \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{u_1}{R} \right) \\ \quad + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{du_1}{ds} - \frac{\varphi}{R} - \tau w_1 \right) + \dots \\ \kappa_\varphi = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} w_1 \varepsilon_3 + \frac{1}{2} u_1 \varepsilon_1 + \dots = \varepsilon_2 - \frac{1}{2} w_1 \left(\frac{du_1}{ds} - \frac{\varphi}{R} - \tau w_1 \right) \\ \quad + \frac{1}{2} u_1 \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) + \dots \\ \kappa_u = \varepsilon_3 + \frac{1}{2} \varphi \varepsilon_1 - \frac{1}{2} w_1 \varepsilon_2 + \dots = \varepsilon_3 + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) \\ \quad - \frac{1}{2} w_1 \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{u_1}{R} \right) + \dots \end{cases}$$

Per la parte lineare delle caratteristiche di deformazione si ritrovano naturalmente le espressioni classiche del *Love* (cfr. [5] p. 447, formula (6) per $u' \rightarrow w$, $v \rightarrow u$, $w \rightarrow v$, $\beta \rightarrow \varphi$, $\rho_0 = R$, $\Sigma_0 = -\frac{1}{\tau}$):

$$\kappa_w^{(1)} \equiv \varepsilon_1^{(1)} = \frac{dw_1}{ds} + \tau u_1, \quad \kappa_\varphi^{(1)} \equiv \varepsilon_2^{(1)} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{u_1}{R}, \quad \kappa_u^{(1)} \equiv \varepsilon_3^{(1)} = -\frac{du_1}{ds} + \frac{\varphi}{R} + \tau w_1,$$

ovvero esplicitamente [cfr. (9)]

$$(20) \quad \begin{cases} \kappa_w^{(1)} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} + \tau u \right) + \tau \left(\frac{du}{ds} - \tau w \right) \\ \kappa_\varphi^{(1)} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \left(\frac{du}{ds} - \tau w \right) \\ \kappa_u^{(1)} = - \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} - \tau w \right) + \frac{\varphi}{R} + \tau \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} + \tau w \right). \end{cases}$$

Per la parte di 2° ordine si ha poi, con le notazioni (9),

$$(21) \quad \begin{cases} \kappa_w^{(2)} = -v_1 \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) - w_1 \frac{dv_1}{ds} - \frac{1}{2R} (u_1^2 + \varphi^2) + \varphi \left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right) \\ \kappa_\varphi^{(2)} = -\frac{1}{R} v_1 u_1 - \frac{1}{2} w_1 \left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right) + \frac{1}{2} u_1 \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) \\ \kappa_u^{(2)} = v_1 \left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right) + u_1 \frac{dv_1}{ds} + \varphi \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) - \frac{1}{2R} u_1 w_1. \end{cases}$$

3. VARIAZIONE DI CURVATURA. — Esprimiamo ora, mediante u , v , w , la differenza $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$ tra la curvatura di l' in P' e l'analogia di l .

Dalla (5) si deduce, derivando rispetto ad s e indicando con $\mathbf{n}'$ il versore della normale principale ad l' :

$$(1 + e)^2 \frac{\mathbf{n}'}{R'} + \frac{de}{ds} \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{n}}{R} + \frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2},$$

ovvero [cfr. (5)]

$$(22) \quad (1 + e)^2 \frac{\mathbf{n}'}{R'} = \frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{1}{1 + e} \frac{de}{ds} \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{W}}{ds} \right) + \frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2}.$$

La formula ora scritta permette di ricavare, nell'ordine, $1/R'$ ed $\mathbf{n}'$ in funzione delle componenti di spostamento.

Precisamente, quadrando e ponendo

$$(23) \quad H = R\mathbf{n} \times \left(\frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2} - \frac{1}{1 + e} \frac{de}{ds} \frac{d\mathbf{W}}{ds} \right) + \frac{R^2}{2} \left[\frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2} - \frac{1}{1 + e} \frac{de}{ds} \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{W}}{ds} \right) \right]^2,$$

si ottiene direttamente:

$$(24) \quad \frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{1 + 2H}}{R(1 + e)^2}.$$

Limitandoci anche qui ai termini del 2° ordine, la (23) si può scrivere

$$(25) \quad H = H^{(1)} + H^{(2)} + \dots,$$

essendo

$$H^{(1)} = R\mathbf{n} \times \frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2}, \quad H^{(2)} = -R \frac{de^{(1)}}{ds} \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{W}}{ds} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2} - \frac{de^{(1)}}{ds} \mathbf{t} \right)^2.$$

D'altra parte, derivando rispetto ad s la (8) e applicando le formule di *Frenet*, si ricava

$$(26) \quad \frac{d^2 \mathbf{W}}{ds^2} = \left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right) \mathbf{b} + \left(\frac{dw_1}{ds} - \frac{w_1}{R} \right) \mathbf{t} + \left(\frac{dw_1}{ds} + \frac{v_1}{R} + \tau u_1 \right) \mathbf{n},$$

in modo che i termini del 1° e 2° ordine di H si esplicitano così:

$$(25') \quad \begin{cases} H^{(1)} = R \left(\frac{dw_1}{ds} + \frac{v_1}{R} + \tau u_1 \right) \\ H^{(2)} = \frac{R^2}{2} \left[\left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right)^2 + \frac{w_1^2}{R^2} - 2 \frac{w_1}{R} \frac{dw_1}{ds} + \left(\frac{dw_1}{ds} + \frac{v_1}{R} + \tau u_1 \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Si ha allora dalla (24)

$$k \equiv \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{\sqrt{1+2H} - 1 - 2e - e^2}{R(1+e)^2} = \frac{1}{R} (1-e)^2 \left(H - \frac{1}{2} H^2 - 2e - e^2 \right) + \dots,$$

ovvero

$$k = \frac{1}{R} (1 - 2e^{(1)}) \left(H^{(1)} - 2e^{(1)} + H^{(2)} - 2e^{(2)} - \frac{1}{2} H^{(1)2} - e^{(1)2} \right) + \dots,$$

cioè in definitiva, tenuto conto delle (15 a, b) e (25'),

$$(27) \quad \begin{cases} k^{(1)} = \frac{1}{R} (H^{(1)} - 2e^{(1)}) = \frac{dw_1}{ds} - \frac{v_1}{R} + \tau u_1 \\ k^{(2)} = \frac{1}{R} \left(H^{(2)} - 2e^{(2)} - \frac{1}{2} H^{(1)2} + 3e^{(1)2} - 2e^{(1)} H^{(1)} \right) = \\ = \frac{1}{R} (v_1^2 - u_1^2) - 2v_1 \left(\frac{dw_1}{ds} + \tau u_1 \right) + \frac{R}{2} \left[\left(\frac{du_1}{ds} - \tau w_1 \right)^2 - \frac{w_1^2}{R^2} - \frac{2}{R} w_1 \frac{dw_1}{ds} \right]. \end{cases}$$

4. CASO DI UNA BARRA PIANA - FLESSIONE PURA. - Prendiamo ora in speciale considerazione il caso particolare di una barra piana: $\tau = 0$.

Le (21) assumono allora la forma

$$\begin{cases} \chi_w^{(2)} = -\frac{d}{ds} (w_1 v_1) - \frac{1}{2R} (u_1^2 + \varphi^2) + \varphi \frac{du_1}{ds} \\ \chi_\varphi^{(2)} = -\frac{1}{R} v_1 u_1 - \frac{1}{2} w_1 \frac{du_1}{ds} + \frac{1}{2} u_1 \frac{dw_1}{ds} \\ \chi_u^{(2)} = \frac{d}{ds} (u_1 v_1) + \varphi \frac{dw_1}{ds} - \frac{1}{2R} u_1 w_1 \end{cases}$$

ovvero, tenuto conto delle (9) e indicando con un apice la derivazione rispetto ad s ,

$$(28) \quad \begin{cases} \chi_w^{(2)} = -\left[\left(v' - \frac{w}{R} \right) \left(w' + \frac{v}{R} \right) \right]' - \frac{1}{2R} (u'^2 + \varphi^2) + \varphi u'' \\ \chi_\varphi^{(2)} = -\frac{1}{R} u' \left(v' - \frac{w}{R} \right) - \frac{1}{2} u'' \left(w' + \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{2} u' \left(w' + \frac{v}{R} \right)' \\ \chi_u^{(2)} = \left[u' \left(v' - \frac{w}{R} \right) \right]' + \varphi \left(w' + \frac{v}{R} \right)' - \frac{1}{2R} u' \left(w' + \frac{v}{R} \right). \end{cases}$$

Nel caso speciale di *flessione pura* nel piano di v e w ($\varphi = 0, u = 0$) le formule precedenti si riducono a

$$(29) \quad \kappa_w^{(2)} = - \left[\left(v' - \frac{w}{R} \right) \left(w' + \frac{v}{R} \right) \right]', \quad \kappa_\varphi^{(2)} = 0, \quad \kappa_u^{(2)} = 0.$$

Si vede bene di qui che, *se la deformazione è priva di estensione* ($e = 0$), ovvero [cfr. (15) e (9)]

$$v' - \frac{w}{R} = - \frac{1}{2} w'^2 - \frac{1}{2} \left(w' + \frac{v}{R} \right)^2 + \dots,$$

la parte di 2° ordine delle caratteristiche di deformazione si annulla identicamente.

Si noti esplicitamente, per il caso della flessione pura, che la caratteristica di deformazione $\kappa_w^{(3)}$, impropriamente chiamata « change of curvature », non coincide con la variazione di curvatura k . Ad esempio è

$$(30) \quad k^{(1)} = \left(w' + \frac{v}{R} \right)' - \frac{1}{R} \left(v' - \frac{w}{R} \right) = w'' + \frac{w}{R^2} + v \left(\frac{1}{R} \right)'$$

e invece

$$\kappa_w^{(1)} = \left(w' + \frac{v}{R} \right)';$$

per le parti di 2° ordine, in parallelo alla (29)₁, si ha

$$(31) \quad k^{(2)} = \frac{1}{R} \left(v' - \frac{w}{R} \right)^2 - 2 \left(v' - \frac{w}{R} \right) \left(w' + \frac{v}{R} \right)' - \frac{1}{2R} \left(w' + \frac{v}{R} \right)^2 - \left(w' + \frac{v}{R} \right) \left(v' - \frac{w}{R} \right)'$$

La coincidenza si ha, almeno per le parti di 1° ordine, solo nel caso *non estensionale* $e = 0$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] G. CAPRIZ, *Sopra le deformazioni elastiche finite di un solido tubolare*, « Rend. di Mat. », serie V, vol. XV, 1-2.
- [2] G. FERRARESE, *Sulla dinamica dei solidi tubolari: equazioni non linearizzate*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, vol. XXX, fasc. 5 - Maggio 1961.
- [3] G. KRALL, *Stabilità trasversale degli archi da ponte*, « Memorie Fische Acc. Lincei », fasc. 13, Vol. VI (1962).
- [4] G. KRALL, *Moltiplicatore critico di una distribuzione di carico*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 12, vol. I (1936).
- [5] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, VI Ed. Cambridge, University Press (1927).
- [6] A. SIGNORINI, *Lezioni di fisica matematica*, 1952-53, 2ª ed. Roma, Veschi.
- [7] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria I, « Annali Matem. Pura e Appl. », IV, tomo XXII (1943).
- [8] S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*, New York, London (1936).

(3) Delle rimanenti è $\kappa_u = 0, \kappa_\varphi = 0$.