Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Orazio Sorace

Superficie Φ e congruenze W

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.6, p. 620–627.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_6_620_0¿

Geometria. — *Superficie* Φ *e congruenze* W (*). Nota di ORAZIO SORACE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

1. Sia F una superficie dello spazio proiettivo S_{n+2} $(n \geq 2)$ tale che le coordinate non omogenee

$$z^i = z^i(u, v) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n+2)$$

di un punto corrente su di essa soddisfino ad una equazione di Laplace del tipo

$$z_{uv} = \mathrm{P} z_v + \mathrm{Q} z_u . \tag{1}$$

Una siffatta superficie (con C. Segre [1] (1)) è allora detta di tipo Φ non parabolico (in quanto tale è l'equazione (1) di Laplace da essa soddisfatta). Su F, le linee coordinate $u =$ cost. e $v =$ cost. sono le linee della rete caratteristica della (1); in quest'equazione, come pure nel seguito, $z_{u^h v^k}$ sta per indicare la $\dfrac{\partial^{h+k} z}{\partial u^h \partial v^k}$.

Gli spazi S_n n–osculatori alle linee $u =$ cost., cioè gli ∞^2 spazi ottenibili (al variare di u, v) congiungendo i punti

$$z, z_v, z_{v^2}, \cdots, z_{v^n},$$

secano un S_3 genericamente fissato secondo rette di una congruenza. Ci si può proporre (similmente a ciò ch'è stato fatto da W. Blaschke [2] e B. Segre [3] in casi speciali) di trovare condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare la superficie F ed il dato S_3 affinché questa congruenza sia W (a falde focali distinte e non degeneri).

Consideriamo all'uopo la trasformazione di Laplace secondo le linee $u =$ cost.:

$$\mathrm{T}: \qquad \bar{z} = \frac{z_v}{\mathrm{Q}} - z, \tag{2}$$

mediante la quale F viene trasformata in una superficie, $\bar{\mathrm{F}}$, che soddisfa ad un'equazione di Laplace dello stesso tipo della (1), e precisamente alla

$$\bar{z}_{uv} = \bar{\mathrm{P}} \bar{z}_v + \bar{\mathrm{Q}} \bar{z}_u , \tag{3}$$

dove $\bar{\mathrm{P}} = \mathrm{P} - (\log \mathrm{Q})_u$, $\bar{\mathrm{Q}} = (\log \bar{\mathrm{P}})_v + \mathrm{Q}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1963.

(1) I numeri entro parentesi quadre rinviano alla bibliografia posta alla fine del lavoro.

A verifica di questo fatto ben noto, osserviamo infatti che, derivando la (2) rispetto ad u, si ha

$$\bar{z}_u = \mathrm{A} z_v, \tag{4}$$

dove si è posto $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{P}}/\mathrm{Q}$. Derivando poi la (2) rispetto a v, si ha

$$\bar{z}_v = \frac{1}{\mathrm{Q}} z_{v^2} - \left(1 + \frac{\mathrm{Q}_v}{\mathrm{Q}^2}\right) z_v; \tag{5}$$

e derivando la (4) rispetto a v, si ottiene

$$\bar{z}_{uv} = \mathrm{A}_v z_v + \mathrm{A} z_{v^2}.$$

Da questa e dalle (4) e (5) si ricava:

$$\bar{z}_{uv} = \overline{\mathrm{P}} \bar{z}_v + \left(\frac{\mathrm{A}_v}{\mathrm{A}} + \mathrm{Q} + \frac{\mathrm{Q}_v}{\mathrm{Q}}\right) \bar{z}_u.$$

Infine, tenendo presente che

$$\frac{\mathrm{A}_v}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{Q}_v}{\mathrm{Q}} + \mathrm{Q} = (\log \mathrm{AQ})_v + \mathrm{Q},$$

ne consegue la (3).

La trasformazione inversa della T è espressa da:

$$z = \frac{1}{\overline{\mathrm{P}}} \bar{z}_u - \bar{z}, \tag{6}$$

ossia, com'è noto, F coincide con la trasformata di Laplace della $\overline{\mathrm{F}}$ secondo le linee $v = \text{cost}$.

Dalla (4), derivando successivamente più volte rispetto a v, e tenendo presente la (3), si ricava che z_{v^r} si esprime linearmente mediante i punti $\bar{z}_u, \bar{z}_v, \bar{z}_{v^2}, \cdots, \bar{z}_{v^{r-1}}$; mentre dalla (6), derivando successivamente più volte rispetto ad u, si ricava che z_{u^s} si esprime linearmente mediante i punti $\bar{z}_u, \bar{z}_{u^2}, \cdots, \bar{z}_{u^{s+1}}$.

Possiamo quindi concludere che, per la superficie di tipo Φ non parabolico che si ottiene applicando ad F k volte la trasformazione T di Laplace secondo le linee $u = \text{cost.}$ (dove k denoti un qualsiasi intero soddisfacente alle $1 \leq k \leq n$), il problema posto sopra si traduce in quest'altro: trovare condizioni necessarie e sufficienti perché gli ∞^2 spazi congiungenti i punti

$$z, z_v, z_{v^2}, \cdots, z_{v^{n-k}}, z_u, z_{u^2}, \cdots, z_{u^k},$$

relativi ad una superficie F che verifichi un'equazione di Laplace del tipo (1), sechino sopra un dato S_3 rette di una congruenza W.

Si presentano per questo problema due casi particolarmente interessanti, rispettivamente per n pari od n dispari. Se n è pari, posto $n = 2r$ si supponga $k = r$. Lo spazio congiungente i punti

$$z, z_v, z_{v^2}, \cdots, z_{v^r}, z_u, z_{u^2}, \cdots, z_{u^r}$$

è allora lo spazio r–osculatore alla superficie F nel suo punto z. In tal caso si ricade in un problema noto e già risolto ([2], [3], [4] per $r = 1$, [5] per r qualunque).

Se n è dispari, posto $n = 2r - 1$ $(r \geq 2)$ si supponga $k = r - 1$. Ci si riconduce allora allo studio delle congruenze secate sull'S_3 assegnato dagli spazi congiungenti i punti

$$z, z_v, z_{v^2}, \cdots, z_{v^r}, z_u, z_{u^2}, \cdots, z_{u^{r-1}}.$$

Nel presente lavoro, quest'ultimo problema viene risolto ed approfondito per $r = 2$, dimostrando la compatibilità delle condizioni da esso fornite.

2. Siano $(z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5)$ coordinate omogenee di un punto dell'S_5 ambiente; e le sei coordinate

$$z^0 = 1 \quad , \quad z^i = z^i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

di un punto corrente su F soddisfino all'equazione di Laplace (1).

Chiameremo *spazio* Σ della F in un suo punto z lo spazio S_3 congiungente i punti z, z_u, z_v, z_{v^2}, cioè lo spazio congiungente il piano tangente alla superficie in z con il piano osculatore alla linea $u =$ cost in quel punto. Un S_3 lo chiameremo *associato* alla superficie F (secondo gli spazi Σ di questa) s'esso viene secato dagli spazi Σ di F secondo rette di una congruenza W (a falde focali distinte e non degeneri).

Chiameremo S_3^{05} l'intersezione dell'iperpiano « all'infinito » di S_5 (di equazione $z^0 = 0$) con l'iperpiano di equazione $z^5 = 0$. Tale S_3^{05} viene tagliato dal piano tangente in z alla F nel punto

$$(7) \qquad x^i = \begin{vmatrix} z_u^i & z_v^i \\ z_u^5 & z_v^5 \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

e dal piano osculatore in z alla linea $u =$ cost nel punto

$$(8) \qquad y^i = \begin{vmatrix} z_v^i & z_{v^2}^i \\ z_v^5 & z_{v^2}^5 \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

i secondi membri delle (7), (8) verranno anche brevemente denotati con $[u, v]$, $[v, v^2]$. Lo spazio Σ di F in z seca quindi l'S_3^{05} nella retta congiungente i punti x e y. Ci proponiamo anzitutto di trovare i fuochi della congruenza descritta in S_3^{05} da questa retta xy, al variare di u, v, ossia al variare di z su F.

Dalle (7), (8), (1) si ricava:

$$(9) \qquad \begin{cases} x_u = Px + a \quad , \quad y_u = 2Py + Qb - (Q_v + Q^2)x, \\ x_v = Qx + b \quad , \quad y_v = c, \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$a = [u^2, v] \quad , \quad b = [u, v^2] \quad , \quad c = [v, v^3],$$

i secondi membri denotando dei determinanti del secondo ordine simili a quelli che figurano nelle (7), (8).

Poiché, per analogia con le (7), (8), il punto b è l'intersezione di S_3^{05} col piano dei punti z, z_u, z_{v^2}, che appartiene a Σ, così b appartiene alla retta xy.

Per le (9), x_v e y_u appartengono a tale retta xy; conseguentemente x e y sono precisamente i fuochi cercati.

Dalle (9), derivando rispetto ad u od a v, si ha tenendo conto della (1):

$$x_{u^2} = (P_u + P^2)\, x + 2\, Pa + d + Qe,$$

$$x_{vu} = (2\, PQ + Q_u + P_v)\, x + Qa + Pb + f,$$

$$x_{v^2} = (Q_v + Q^2)\, x + Py + 2\, Qb + g,$$

dove abbiamo posto

$$d = [u^3 , v] \quad , \quad e = [u^2 , u] \quad , \quad f = [u^2 , v^2] \quad , \quad g = [u , v^3].$$

I punti x, a, e sono allineati, poiché stanno sulla retta in cui l'S_3^{o5} viene intersecato dall'S_3 individuato dai punti z, z_u, z_v, z_{u^2}; sarà quindi:

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{u^2}] = [x\, a\, b\, d],$$

i due membri denotando determinanti del quarto ordine le cui righe si ottengono in corrispondenza dei valori 1, 2, 3, 4 attribuiti come apici alle espressioni entro la rispettiva parentesi quadra. I punti x, a, b, f sono complanari, perché stanno nel piano in cui l'S_3^{o5} viene intersecato dall'S_4 individuato dai punti z, z_u, z_{u^2}, z_v, z_{v^2}; risulta pertanto:

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{uv}] = [x\, a\, b\, f] = 0.$$

Infine, dalle equazioni precedenti si ricava:

$$[x\, x_u\, x_v\, x_{v^2}] = [x\, a\, b\, g].$$

Dalle (9), (1) si ha poi:

$$y_{u^2} = 2\,(P_u + 2\, P^2)\, y + \{QP_v - 3\, PQ_v - 2\, PQ^2 - (Q_v + Q^2)_u\}\, x +$$
$$+ (3\, PQ + Q_u)\, b + Qf - (Q_v + Q^2)\, a,$$

$$y_{uv} = (2\, P_v + PQ - Q^3)\, y - (3\, QQ_v + Q_{v^2})\, x + 2\, Pc + Qg,$$

$$y_{v^2} = h + i,$$

dove abbiamo posto:

$$h = [v^2 , v^3] \quad , \quad i = [v , v^4].$$

Conseguentemente risulta:

$$[y\, y_u\, y_v\, y_{u^2}] = Q^2\, [y\, b\, c\, f] - Q\,(Q_v + Q^2)\, \{[y\, b\, c\, a] +$$
$$+ [y\, x\, c\, f]\} + (Q_v + Q^2)^2\, [y\, x\, c\, a].$$

I punti x, y, c, g sono complanari, perché stanno nel piano in cui l'S_3^{o5} viene interessato dall'S_4 individuato dai punti z, z_u, z_v, z_{v^2}, z_{v^3}; risulta quindi:

$$[y\, y_u\, y_v\, y_{uv}] = [x\, y\, c\, g] = 0.$$

I punti y, c, h sono allineati, perché stanno sulla retta in cui l'S_3^{o5} viene intersecato dall'S_3 individuato dai punti z, z_v, z_{v^2}, z_{v^3}; avuto anche riguardo alle precedenti equazioni, avremo dunque:

$$[y\,y_u\,y_v\,y_{v^2}] = Q\,[y\,b\,c\,i] - (Q_v + Q^2)\,[y\,x\,c\,i].$$

Poniamo ora:

$$H = [z_u\,z_{u^2}\,z_{u^3}\,z_v\,z_{v^2}],$$

$$K = [z_u\,z_{u^2}\,z_v\,z_{v^2}\,z_{v^3}],$$

$$L = [z_u\,z_v\,z_{v^2}\,z_{v^3}\,z_{v^4}],$$

dove i secondi membri denotano determinanti del quinto ordine le cui righe si ottengono attribuendo dappertutto alle z come apici i valori 1, 2, 3, 4, 5. Con semplici calcoli, si trova infine:

$$[x\,a\,b\,d] = -z_u^5\,(z_v^5)^2\,H \quad ; \quad [x\,a\,b\,g] = (z_u^5)^2\,z_v^5\,K\,;$$

$$[y\,b\,c\,f] = -z_v^5\,(z_{v^2}^5)^2\,K \quad ; \quad [y\,x\,c\,a] = -(z_v^5)^3\,K\,;$$

$$[y\,b\,c\,i] = -(z_v^5)^2\,z_{v^2}^5\,L \quad ; \quad [y\,x\,c\,i] = -(z_v^5)^3\,L\,;$$

$$[y\,x\,c\,f] = [y\,b\,c\,a] = -(z_v^5)^2\,z_{v^2}^5\,K.$$

Supponendo, onde evitare casi banali, che risulti:

$$z_u^5\,z_v^5\,\{Qz_{v^2}^5 - (Q_v + Q^2)\,z_v^5\}\,HKL \neq 0, \tag{10}$$

le equazioni differenziali delle linee asintotiche sulle due superficie focali della congruenza xy, luoghi dei punti x ed y, sono rispettivamente:

$$z_v^5\,H\,du^2 - z_u^5\,K\,dv^2 = 0,$$

$$\{Qz_{v^2}^5 - (Q_v + Q^2)\,z_v^5\}\,K\,du^2 + z_v^5\,L\,dv^2 = 0.$$

Per definizione la congruenza suddetta è W, se e soltanto se queste ultime coincidono, se cioè

$$\frac{HL}{K^2} + \frac{z_u^5}{(z_v^5)^2}\{Qz_{v^2}^5 - (Q_v + Q^2)\,z_v^5\} = 0. \tag{11}$$

Osservando ora che, per la (1), risulta

$$\frac{z_u^5}{(z_v^5)^2}\{Qz_{v^2}^5 - (Q_v + Q^2)\,z_v^5\} = PQ - \left(z_u^5\,\frac{Q}{z_v^5}\right)_v = PQ + P_v - [\log z_v^5]_{uv},$$

la (10) può scriversi

$$z_u^5\,z_v^5\,\{PQ + P_v - [\log z_v^5]_{uv}\}\,HKL \neq 0 \tag{12}$$

e la (11) può mettersi sotto la forma:

$$\frac{HL}{K^2} + PQ + P_v - [\log z_v^5]_{uv} = 0. \tag{13}$$

Chiamando A_{ij} e B_{ij} rispettivamente i complementi algebrici degli elementi dei determinanti K e L, nessuna delle due falde focali è degenere se, assieme alla (12), risulta

$$A_{r5}\, B_{s5} \neq 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4) \tag{14}$$

per almeno un valore di r ed un valore di s. Si conclude che:

Le (12), (13), (14) *sono condizioni necessarie e sufficienti affinché lo spazio* S_3^{05} *risulti associato alla superficie* F (nel senso specificato nel secondo capoverso del n. 2).

3. Mediante un cambiamento di coordinate, dal precedente risultato si ricavano agevolmente le condizioni affinché risulti associato alla superficie lo spazio $S_3^{\sigma 5}$ di equazioni

$$\sum_{i=0}^{5} s_i z^i = z^5 = 0.$$

Chiamando $\sigma(u, v)$ il valore che assume $\Sigma\, s_i z^i$ sulla superficie F, si trova così che la (14) non muta, mentre le (12) e (13) vanno rispettivamente sostituite con le seguenti:

$$\begin{vmatrix} \sigma & \sigma_v \\ z^5 & z_v^5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma & \sigma_u \\ z^5 & z_u^5 \end{vmatrix} \left\{ PQ + P_v - \left(\log \begin{vmatrix} \sigma & \sigma_v \\ z^5 & z_v^5 \end{vmatrix} \right)_{uv} \right\} HKL \neq 0, \tag{15}$$

$$\frac{HL}{K^2} + PQ + P_v - \left\{ \log \begin{vmatrix} \sigma & \sigma_v \\ z^5 & z_v^5 \end{vmatrix} \right\}_{uv} = 0.$$

Se poi ancora più in generale, vogliamo che sia associato alla F l'S_3 di equazioni

$$\sum_{i=0}^{5} s_i z^i = \sum_{i=0}^{5} a_i z^i = 0,$$

si vede che, chiamando $\alpha(u, v)$ il valore assunto da $\Sigma\, a_i z^i$ sulla F, basta all'uopo sostituire α in luogo di z^5 nei determinanti del secondo ordine che figurano nelle (15).

5. Se vogliamo che, oltre allo spazio S_3^{05}, risulti associato ad F lo spazio $S_3^{\sigma 5}$, assieme alle condizioni (12), (13) e (14) dovrà anche valere la:

$$[\log z_v^5]_{uv} = \left[\log \begin{vmatrix} \sigma & \sigma_v \\ z^5 & z_v^5 \end{vmatrix} \right]_{uv};$$

da qui subito si ricava:

$$\frac{\sigma z_v^5 - \sigma_v z^5}{z_v^5} = UV, \tag{16}$$

denotando con U e V due funzioni rispettivamente della sola u e della sola v, con la condizione ulteriore che si abbia

$$(\sigma z_v^5 - \sigma_v z^5)(\sigma z_u^5 - \sigma_u z^5) \neq 0. \tag{17}$$

In particolare, se sono associati ad F i due S_3 di equazioni

$$z^0 = z^j = 0 \quad , \quad z^i = z^j = 0 \qquad (i\,, j = 1\,,2\,,3\,,4\,,5\,;\; i \neq j),$$

e cioè se sono associati ad F due S_3 dell'iperpiano $z^j = 0$, e precisamente quello «all'infinito» ed un S_3 coordinato, dovranno essere verificate le (12), (13) e (14), che ora diventano:

$$z_u^j z_v^j \{ PQ + P_v - [\log z_v^j]_{uv} \} HKL \neq 0, \tag{18}$$

$$\frac{HL}{K^2} + PQ + P_v - [\log z_v^j]_{uv} = 0, \tag{19}$$

$$A_{rj}\, B_{sj} \neq 0, \tag{20}$$

e le (16) e (17), che ora diventano:

$$z^i z_v^j - z_v^i z^j = z_v^j \,\overline{U}_i\, \overline{V}_i\,, \tag{21}$$

$$(z^i z_v^j - z_v^i z^j)\,(z^i z_u^j - z_u^i z^j) \neq 0. \tag{22}$$

Nel caso speciale in cui la superficie F abbia equazioni del tipo

$$z^i = U_i V_i \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,4\,,5), \tag{23}$$

la (21) viene ad essere identicamente soddisfatta e la (19) diventa:

$$\frac{HL}{K^2} + PQ + P_v = 0. \tag{24}$$

Una superficie del tipo (23), dove le U_i, V_i soddisfino alla (1) ed alla (24) ed a certe disuguaglianze, in cui ora si traducono le (18), (20) e (22), *ammette come associati* 15 S_3, e precisamente quelli di equazioni:

$$z^i = z^j = 0 \qquad (i\,, j = 0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5).$$

Un esempio notevole di superficie siffatta del tipo (23), è la superficie di equazioni

$$z^i = (h_i + u)^\lambda\,(h_i + v)^\mu \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,4\,,5),$$

dove le h_i denotano costanti distinte arbitrarie, e λ, μ costanti opportunamente scelte. Tali superficie sono intanto di tipo Φ, in quanto soddisfano all'equazione di Laplace (1) in cui si assuma

$$P = \frac{\lambda}{u - v} \quad , \quad Q = -\frac{\mu}{u - v}\,.$$

La (24) ora diviene

$$\lambda + \mu = 3,$$

e le disuguaglianze (18), (20) e (22) si traducono nelle condizioni semplici che λ e μ risultino diverse da 0, 1, 2, 3.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine*, « Atti Acc. Sc. Torino », *42*, 559–591 (1907).
[2] W. BLASCHKE, *Sulla geometria proiettivo-differenziale delle superficie* V_2 *dello spazio* P_4 « Rend. Circ. Mat. Palermo » (2), *3*, 193–197 (1954).
[3] B. SEGRE, *Intorno ad un problema di Wilhelm Blaschke*, « Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Univ. Hamburg », *20*, 1/2, 28–40, (1955).
[4] O. SORACE, *Sulle superficie di* S_4 *aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XX, fasc. 4, 452–456 (1956).
[5] O. SORACE, *Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXV, fasc. 6, 465–469 (1958).